

Universität Regensburg
Naturwissenschaftliche Fakultät II - Physik

Ausbildungsseminar:
Kerne und Sterne - Nukleare Astrophysik
Sommersemester 2007

Die Chandrasekhar Grenzmasse



Raphael Tautz

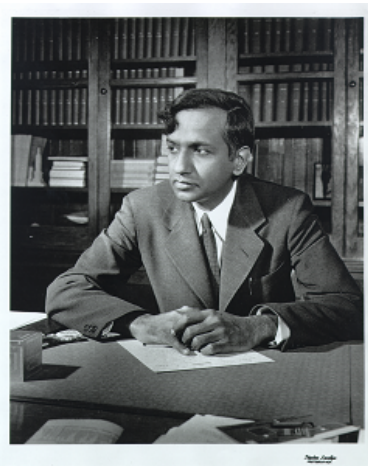
22.05.2007

Inhaltsverzeichnis

1	Subrahmanyan Chandrasekhar	3
2	Die theoretische Beschreibung von weißen Zwergen und Neutronensternen	5
2.1	Der Masterplan	5
2.2	Sternaufbaugleichungen	5
2.3	Die Beschreibung von WDs und N*s als Fermigas	6
2.4	Die Zustandsgleichung eines Fermigases	6
2.5	Die Lösung der Sternaufbaugleichungen	10
2.6	Die Chandrasekhar-Grenzmasse	11
2.7	Die Näherung $T = 0$	13
3	Jenseits der Grenzmasse	14

1 Subrahmanyan Chandrasekhar

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit der Stabilität von verendeten Sternen in der Form von Weißen Zwergen (im folgenden abgekürzt mit WD = "White Dwarf") und Neutronensternen (N^* s). Bis zum Jahre 1930 war man der Ansicht, diese erloschenen Himmelsobjekte seien durch das Gleichgewicht aus Gravitationsdruck und thermischem Druck im Inneren stabilisiert. Diese Annahme führte jedoch zu Widersprüchen. Durch die permanente Abstrahlung von Energie in der Form von Temperaturstrahlung wäre ein WD einem kontinuierlichen Energieverlust unterworfen, welcher eine ständige Verringerung des Radius zur Folge hätte. Man war der Überzeugung, dass ein weißer Zwerg nach seiner Abkühlung durch den Druck zwischen seinen Atomen stabilisiert werde. Hierfür setzte man aber ein Dichte voraus, die mit der Dichte von irdischem Gestein oder anderen Festkörpern vergleichbar ist. Diese Argumentation führte zu einem Paradoxon, wonach sich ein weißer Zwerg, nach dem er abgekühlt und geschrumpft ist, wieder gegen den Gravitationsdruck ausbreiten muss, um schließlich die Dichte von von Gestein einzunehmen.



Subrahmanyan Chandrasekhar

Bildquelle: [6]

Im Jahre 1930 gelang es dem indischen Physiker Subrahmanyan Chandrasekhar (1910 - 1995) die Stabilität solcher Himmelsobjekte auf den quantenmechanischen Entartungsdruck von Fermionen zurückzuführen, und so auch eine Massenobergrenze für WDs herzuleiten, die bekannte nach ihm benannte Chandrasekhar-Grenzmasse. Obwohl man in seinen Berechnungen keinen Fehler finden konnte, war die damalige astronomische Fachwelt, allen voran Eddington, bestrebt, diese Ergebnisse ad absurdum zu führen. Man wollte der unweigerlichen Folge, dem Gravitationskollaps, bei Überschreitung einer solchen Grenzmasse aus dem Weg gehen und war versucht andere Gesetze zu finden, die einen derartigen Kollaps verhinderten. Die grobe fachliche und persönliche Abweisung, die er durch sein Idol Eddington und andere Kollegen der Astronomie grundlos erfahren musste, trieben den damals noch sehr jungen Chandrasekhar in die Resignation, woraufhin er sich für lange Zeit von der Entwicklung der weißen Zwerge abwandte. Erst viele Jahre später, vor allem

aber nach dem Tod von Eddington, fing man allmählich an, seine Ergebnisse zu akzeptieren und brachte ihm die verdiente Anerkennung entgegen. Er erhielt im Jahre 1983 den Nobelpreis für Physik "*Für seine theoretischen Studien der physikalischen Prozesse, die für die Struktur und Entwicklung der Sterne von Bedeutung sind*".

2 Die theoretische Beschreibung von weißen Zwergen und Neutronensternen

2.1 Der Masterplan

Beginnen wir zunächst mit einem Gesamtüberblick über die Vorgehensweise zur Herleitung von Radius- und Massegleichungen in Abhängigkeit von der Massendichte WDs und N*s.

1. Sterne sowie Sternleichen im Sternleichgewicht werden durch Sternaufbaugleichungen beschrieben. Man erhält daraus die hydrostatische Grundgleichung, welche es zu lösen gilt:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)$$

Um diese Gleichung lösen zu können, müssen wir den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte kennen.

2. Um den benötigten Zusammenhang zwischen Druck und Dichte zu bestimmen, betrachten wir unser System als Fermigas, und erhalten die **polytrope Zustandsgleichung:** $P = k\rho^\gamma$ mit verschiedenen Polytropenexponenten γ für den nichtrel. und den rel. Grenzfall. Diese Beziehung zwischen Druck und Massendichte können wir in die hydrostatische Grundgleichung einsetzen.
3. Setzt man eine polytrope Zustandsgleichung in die hydrostatische Grundgleichung ein, so erhält man daraus die Lane-Emden-Gleichung. Die Lösungen dieser Differentialgleichung, die von k und γ der polytropen Zustandsgleichung, und damit vom Fermigas abhängen, liefern uns Gleichungen für Radius und Masse des WDs bzw. N*s.

2.2 Sternaufbaugleichungen

Im Sternleichgewicht gelten die Sternaufbaugleichungen. Diese wurden bereits im Rahmen dieses Seminars ausführlich von Mathias Heise hergeleitet. Details und Hintergründe können in seinem Skript "Grundgleichungen des Sternaufbaus" nachgelesen werden. Das Resultat, welches wir hier benötigen ist die hydrostatische Grundgleichung ([2] Gleichung 6):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \tag{1}$$

Leider ist der Verlauf von Masse und Dichte in einem Stern, bzw. einer Sternleiche in unserem Fall, nicht von vorneherein bekannt. D. h. wir müssen erst den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte finden, um diese Gleichung lösen zu können. Die Herleitung dieses Zusammenhangs wird uns im Folgenden beschäftigen.

2.3 Die Beschreibung von WDs und N*s als Fermigas

Da bei WDs und N*s die Kernfusion erloschen ist und die thermische Strahlung nicht ausreicht um die Sternleiche gegen den Gravitationsdruck zu stabilisieren, wird die Materie soweit komprimiert, bis der Entartungsdruck eine weitere Kompression verhindert. An diesem Punkt befinden sich der makroskopische Gravitationsdruck und der quantenmechanische Entartungsdruck der Fermionen (Spin 1/2 Teilchen) im Gleichgewicht. Idealerweise behandelt man ein Gas, welches ausschließlich aus Fermionen besteht, ein sogenanntes Fermigas. Im Falle eines WDs handelt es sich um Elektronen, beim N* entsprechend um Neutronen. Da in einem WD die Materie aus Elektronen und wesentlich schwereren Protonen und anderen Kernen besteht, ist es eine ausreichende Näherung, freie Elektronen als Fermigas zu behandeln. Bei derart großen Drücken, wie sie im Inneren von WDs vorkommen, kommt man oft zu Energien, bei denen Elektronen relativistisch zu behandeln sind. D. h. die kinetische Energie der Elektronen ist von der Größenordnung ihrer Ruheenergie oder größer. Dank der großen Ruheenergie der Kerne, die ungefähr 2000 mal größer ist als die der Elektronen, und die daraus resultierende langsamere Geschwindigkeit, können wir die Protonen und Kerne nichtrelativistisch behandeln. Aus diesem Grund können wir auch im Grenzfall für ultrarelativistische Elektronen ($p \gg mc$) in WDs immer noch die Gravitation, die durch die nichtrelativistische Masse der Protonen und Kerne verursacht wird (Die Masse der Elektronen ist ca. 2000 mal kleiner und wird vernachlässigt) durch die Newtonsche Mechanik beschreiben. Diese Methode eignet sich nicht für die ultrarelativistischen Neutronen in N*s, da diese relativistischen Teilchen sowohl für den Entartungsdruck als auch für den Gravitationsdruck verantwortlich sind. In diesem Fall muss man die Gravitation mit der allgemeinen Relativitätstheorie erklären, was jedoch den Rahmen dieses Seminars sprengen würde.

2.4 Die Zustandsgleichung eines Fermigases

Die Besetzung der Zustände in einem Fermigas wird durch die Fermi-Dirac-Verteilung beschrieben und ist von der Temperatur abhängig.

$$n(E) = \frac{1}{e^{\frac{E}{k_b T}} + 1} \quad (2)$$

Wir machen hier die Näherung $T=0$, bei der sich die Verteilung zur Stufenfunktion vereinfacht und sich alle Fermionen im niedrigsten Energiezustand befinden (entartetes Fermigas). Wir werden später sehen, dass diese Näherung sinnvoll ist, obwohl sich die Himmelskörper in der Temperatur deutlich von $T=0$ unterscheiden. Da jedoch die Temperatur, die der Fermienergie des Gases entspricht, um viele Größenordnungen höher ist als die Temperatur der Himmelskörper, kann man die Näherung gut rechtfertigen.

Wir beginnen nun mit der Herleitung der Gesamtenergie eines entarteten Fermigases, um anschließend daraus die Beziehung zwischen Druck und Dichte zu bestimmen. Diese Beziehung benötigen wir, um die hydrostatische Grundgleichung zu lösen und die Abhängigkeit des Radius und der Masse von der Dichte zu errechnen.

Bei der Temperatur $T=0$ sind wie bereits erwähnt alle niedrigsten Zustände bis zum Maximalimpuls, dem Fermiimpuls p_F mit jeweils 2 (Spinartung) Fermionen besetzt. Wir berücksichtigen das Pauliverbot, in dem wir jedem Fermionenpaar (Spin up und Spin down) ein Volumen von h^3 im 6-dimensionalen Zustandsraum, bestehend aus Orts- und Impulsraum, zugestehen. Es folgt für die Zahl der besetzten Zustände:

$$N = \frac{\int_V d^3r \int_{p \leq p_F} d^3p \cdot \sum_{Spins}}{h^3} = \frac{V \cdot \frac{4}{3}\pi p_F^3 \cdot 2}{h^3} \quad (3)$$

Entsprechend erhält man für die Teilchendichte

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\frac{8}{3}\pi p_F^3}{h^3} = \frac{\frac{8}{3}\pi p_F^3}{8\pi^3 \hbar^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad \rightarrow \quad p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}} \propto n^{\frac{1}{3}}$$

Zur Berechnung der Energie geht man von der relativistischen Energie-Impulsbeziehung aus:

$$E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

Die Gesamtenergie erhält man durch Aufsummierung aller besetzten Zustände:

$$E_{Ges} = \sum_{p \leq p_F} E(\vec{p}) = \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_F} dp 4\pi p^2 \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (4)$$

Durch die geeignete Substitution $x := \frac{p}{mc}$ erhält man eine etwas andere Form der Gleichung. Mit m wird die Ruheenergie eines Elektrons bezeichnet.

$$E_{Ges} = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1 + x^2} \quad (5)$$

Dieses Integral lässt sich leicht mit Hilfe von Maple lösen und ergibt den Ausdruck:

$$f(x_F) := \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{8} [x_F (1 + 2x_F^2) \sqrt{1 + x_F^2} - \operatorname{arcsinh}(x_F)]$$

$$f(x_F) \approx \begin{cases} \frac{x_F^3}{3} (1 + \frac{3}{10} x_F^2 + \dots) & : x_F \ll 1 & \text{nichtrel.} \\ \frac{x_F^4}{4} (1 + \frac{1}{x_F^2} + \dots) & : x_F \gg 1 & \text{rel.} \end{cases}$$

Im letzten Schritt wurden wieder zwei Näherungen gemacht.

Da $x_F = \frac{p}{mc}$ können wir für den nichtrelativistischen Grenzfall die Näherung $x_F \ll 1$ machen, und die Funktion $f(x_F)$ um $x_F = 0$ in einer Taylorreihe entwickeln. Die Resultate für den nichtrelativistischen Fall und analog für den relativistischen Fall, bei dem man $f(x_F)$ um $x_F = \infty$ entwickelt, sind oben angegeben.

Wir haben jetzt einen Ausdruck für die Gesamtenergie des Fermigas gefunden.

Um daraus den Druck zu bestimmen, ziehen wir den ersten Hauptsatz der Thermodynamik heran:

$$dE = T \cdot dS - P \cdot dV$$

Diese Gleichung können wir lösen, da wir ein Fermigas der Temperatur $T=0$ annehmen, und für die Energie die Beziehung

$$E = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} V f(x_F)$$

gefunden haben.

$$P = -\frac{dE}{dV} = \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[-f(x_F) - V \frac{df(x_F)}{dx_F} \frac{dx_F}{dV} \right]$$

Um den Druck in Abhängigkeit der Teilchendichte zu erhalten, setzen wir in $x_F = \frac{p_F}{mc}$ für den Fermiimpuls die aus Gleichung (3) abgeleitete Relation

$$p_F = \hbar (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}} = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (6)$$

ein, und erhalten daraufhin:

$$x_F = \frac{\hbar}{mc} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{dx_F}{dV} = -\frac{x_F}{3V}$$

Für den Druck erhalten wir nun die Beziehung:

$$\begin{aligned} P &= \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \sqrt{1 + x_F^2} - f(x_F) \right] \approx \\ &\approx \frac{m^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \begin{cases} \frac{x_F^5}{15} & : x_F \ll 1 & \text{nichtrel.} \\ \frac{x_F^4}{12} & : x_F \gg 1 & \text{rel.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgrund des Zusammenhangs $x_F \propto p_F \propto n^{1/3}$ haben wir nun eine Zustandsgleichung, welche den Druck mit Teilchendichte in Verbindung bringt.

$$P = P(x_F) \rightarrow P = P(n)$$

Bisher gilt die Zustandsgleichung für Fermionen aller Art, also für Elektronen und Neutronen. Um nun eine Verbindung zwischen Druck und Massendichte herzustellen, müssen wir zwischen WDs (Elektronen) und N^* s (Neutronen) unterscheiden. Für die jeweilige Massendichte gilt:

$$\rho = \begin{cases} n_n \cdot m_N & : N^* \\ n_e \cdot m_N \cdot \sigma & : WD \end{cases}$$

Hierbei steht σ für die Zahl der Nukleonen pro Elektron. Diese variiert je nach der chemischen Zusammensetzung des WDs. Hier einige Beispielwerte:

Zusammensetzung	σ
1H	1,00
4He	2,00
${}^{12}C$	2,00
${}^{16}O$	2,00
${}^{56}Fe$	2,15

Wir können die Teilchendichte n durch die Massendichte ρ ausdrücken, und erhalten damit unsere Variable x_F in Abhängigkeit von der Massendichte:

$$x_F(\rho) = \frac{\hbar}{mc} \left(3\pi^2 \frac{\rho}{m_N \sigma} \right)^{\frac{1}{3}} \propto \rho^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

Wenn die kinetische Energie der Fermionen gerade so groß ist wie deren Ruheenergie, wenn also $x_F = 1$ ist, befinden wir uns am Übergang zwischen nichtrelativistischem und relativistischem Grenzfall. In diesem Fall ist x_F bekannt, und wir können Gleichung (7) nach ρ auflösen, um so einen Schwellwert zwischen den beiden Grenzfällen für die Massendichte zu finden.

$$\rho_c = \rho(x_F = 1) = \frac{m^3 c^3}{\hbar^3} \frac{m_N \sigma}{3\pi^2} = \begin{cases} 2 \cdot 10^9 \frac{kg}{m^3} & WD \\ 6 \cdot 10^{18} \frac{kg}{m^3} & N^* \end{cases}$$

Da wir jetzt den Zusammenhang zwischen Druck und x_F , sowie den Zusammenhang zwischen x_F und der Massendichte ρ (Gleichung (7)) kennen, können wir diese zusammenführen und erhalten daraus den Druck in Abhängigkeit von der Massendichte. Wir haben den Druck für die beiden Grenzfälle $x_F \ll 1$ und $x_F \gg 1$ berechnet. Diese Grenzfälle können wir nun durch das gleichwertige Verhältnis der Massendichte ρ zur Schwellwertdichte ρ_c ausdrücken:

$$P = \begin{cases} K_1 \rho^{\frac{5}{3}} & ; & K_1 = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m} \left(\frac{3\pi^2}{m_N \sigma} \right)^{\frac{5}{3}} & \rho \ll \rho_c & (nichtrel.) \\ & ; & & & \\ K_2 \rho^{\frac{4}{3}} & ; & K_2 = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{m_N \sigma} \right)^{\frac{4}{3}} & \rho \gg \rho_c & (rel.) \end{cases}$$

Dies sind die polytropen Zustandgleichungen eines Fermigas bei $T = 0$. Für den nichtrel. Fall erhalten wir einen Polytropenexponenten $\gamma = \frac{5}{3}$ und für den rel. Fall $\gamma = \frac{4}{3}$. Allerdings dürfen wir an dieser Stelle nicht vergessen, dass es sich bei der Annahme $T = 0$ um eine Näherung handelt. Eine realistischere Zustandgleichung erhält man mit der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion (Gleichung (2)), aber an dieser Stelle soll uns die Näherung genügen.

2.5 Die Lösung der Sternaufbaugleichungen

Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, dass wir mit der Näherung $T = 0$ auf die einfache temperaturunabhängige Zustandsgleichung für ein Fermigas

$$P = k\rho^\gamma \quad (8)$$

kommen. Setzt man diese polytrophe Zustandsgleichung in die hydrostatische Grundgleichung ein, so erhält man daraus die **Lane-Emdensche-Differentialgleichung** ([4], Gleichung (2.18)):

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + y^n = 0 \quad (9)$$

Die Herleitung wurde im Rahmen dieses Seminars bereits von Martin Müller gezeigt, und ist in dessen Skript nachzulesen.

Es gibt verschiedene Darstellungsweisen der Lane-Emdenschen-DGL, je nachdem ob man den Polytropenexponenten γ oder den Polytropenindex n verwendet. Diese sind folgendermaßen verknüpft:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad (10)$$

Die ursprüngliche Abhängigkeit vom Radius r wurde durch eine Substitution durch die dimensionslose Variable $x = a \cdot r$ ersetzt.

Auch die Dichte ρ wurde reskaliert um eine dimensionslose Variable zu erhalten. Wir wollen diese sogenannten Lane-Emden-Funktionen, die im Skript von Martin Müller mit y bezeichnet werden der Einheitlichkeit in den nächsten Vorträgen halber mit Θ bezeichnen:

$$\Theta := y = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$$

Mit $\rho_0 = \rho(r=0)$ = Dichte im Zentrum.

Damit erhalten wir die Lane-Emdensche-DGL in der Form:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Theta}{dx} \right) + \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0 \quad (11)$$

In unseren Fällen, $\gamma = \frac{5}{3}$ (nichtrel.) und $\gamma = \frac{4}{3}$ (rel.), ist eine analytische Lösung der Gleichung nicht möglich (siehe [4]). Jedoch kann die Gleichung numerisch gelöst werden. Aus der Nullstelle der Lane-Emden-Funktion Θ gewinnt man den Sternradius und die Sternmasse (siehe [4]).

$$R = \sqrt{\frac{k\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}} \rho_0^{\frac{\gamma}{2}-1} x_1$$

$$M = 4\pi \left(\frac{k\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_0^{\frac{3\gamma-4}{2}} |x_1^2 \Theta'(x_1)|$$

Die benötigten Werte für x_1 (Nullstelle der Lane-Emden-Fkt.) und $|x_1^2 \Theta'(x_1)|$ können den tabellierten numerischen Lösungen entnommen werden. Nachfolgend sind die Werte angegeben, die wir benötigen.

	n	γ	x_1	$ x_1^2 \Theta'(x_1) $
nichtrel.	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	3,65375	2,71406
rel.	3	$\frac{4}{3}$	6,89685	2,01824

2.6 Die Chandrasekhar-Grenzmasse

Jetzt sind wir am Ziel angekommen und können den Radius und die Masse für WDs und N*s berechnen.

Nichtrelativistischer Grenzfall:

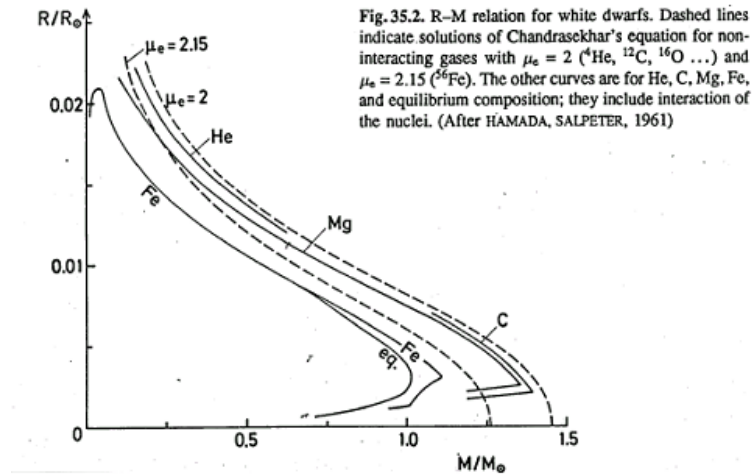
$$R = \sqrt{\frac{5K_1}{8\pi G}} \rho_0^{-\frac{1}{6}} \cdot 3,65 = \begin{cases} \frac{2,00}{\sigma} \left(\frac{\rho_c^{WD}}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{6}} \cdot 10^4 km & WD \\ 11 \left(\frac{\rho_c^{N^*}}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{6}} km & N^* \end{cases}$$

$$M = 4\pi \left(\frac{5K_1}{8\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}} \cdot 2,71 = \begin{cases} \frac{2,79}{\sigma^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_c^{WD}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot M_{Sonne} & WD \\ 2,79 \left(\frac{\rho_0}{\rho_c^{N^*}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot M_{Sonne} & N^* \end{cases}$$

Aus den Gleichungen für Radius und Masse eines WDs erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{R}{R_{Sonne}} = 0,0127 \left(\frac{M}{M_{Sonne}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{\sigma} \right)^{\frac{5}{3}}$$

Außerdem können wir der Massengleichung entnehmen, dass $\rho_0 \propto M^2$. Ein Stern, der durch das Fermigas der Elektronen stabilisiert wird, verringert seinen Radius mit zunehmender Masse, ganz gegen die Erfahrung mit klassischen Gasen. Folgende Grafik zeigt die Radius-Masse-Beziehung nach vollständig relativistischer Rechnung.



Abhängigkeit von Radius und Masse nach rel. Rechnung. Mit $\mu_e := \sigma =$ Anzahl der Nukleonen pro Elektron.

Gestrichelte Kurven: freies Fermigas

Durchgezogene Kurven: inkl. Coulomb WW

Für den relativistischen Grenzfall erhalten wir Radius und Masse nur für WDs. Wie bereits angesprochen können beim WD die Elektronen als relativistisches Fermigas und gleichzeitig die Kerne, die näherungsweise die gesamte Gravitation verursachen, als nichtrelativistisch betrachtet werden. Bei N*s dagegen wird die Gravitation und der Entartungsdruck von den Neutronen verursacht, weshalb hier auch der Gravitationsdruck relativistisch mit der ART bestimmt werden müsste.

Deshalb hier Radius und Masse im rel. Grenzfall nur für WDs:

$$R = \sqrt{\frac{K_2}{\pi G}} \rho_0^{-\frac{1}{3}} \cdot 6,90 = \frac{5,33}{\sigma} \left(\frac{\rho_c^{WD}}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 10^4 km \quad \text{WD}$$

Chandrasekhar-Grenzmasse

$$M_{Ch} = 4\pi \left(\frac{K_2}{\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_0 \cdot 2,02 = \frac{5,87}{\sigma^2} \cdot M_{Sonne} \stackrel{\sigma=2,15}{=} 1,27 \cdot M_{Sonne} \quad \text{WD}$$

Man sieht, dass für die Masse eines WDs im rel. Grenzfall die Dichte ρ_0 nicht mehr eingeht. Dies führt dazu, dass die Chandrasekhar-Grenzmasse in unserer Näherung von universaler Gültigkeit und deshalb auch von großer Bedeutung ist. Sie hängt lediglich von der Anzahl der Nukleonen pro Elektron ab, also von der chemischen Zusammensetzung des Sterns. Es gibt theoretisch keinen stabilen Zustand für Sternleichen, deren Masse die Chandrasekhar-Grenze übersteigt. In diesem Fall

vermag auch der Entartungsdruck der Fermionen nicht mehr der Gravitation des Eigengewichtes standzuhalten. Tatsächlich wurden bisher auch keine WDs mit größerer Masse entdeckt.

2.7 Die Näherung $T = 0$

An dieser Stelle widmen wir uns einem kurzen Beispiel, um eine Vorstellung von der Fermienergie eines WDs zu bekommen und so die Näherung $T = 0$ besser nachvollziehen zu können.

Wir betrachten in unserem stark vereinfachten Gedankenexperiment einen WD aus Wasserstoff mit der Masse unserer Sonne $M \approx 2 \cdot 10^{30} kg$. Die Masse wird näherungsweise nur von den Protonen getragen. Da wir von Wasserstoff ausgehen ist die Anzahl der Elektronen gleich der Anzahl der Protonen und wir können diese einfach berechnen:

$$N_e = \frac{M}{m_p} \approx 10^{58}$$

Diese Anzahl von Elektronen soll auf die typische Größe eines WDs im nichtrel. Grenzfall komprimiert sein. Für dessen Radius setzen wir $\rho_0 \approx \rho_c^{WD}$. Auch größere Abweichungen von dieser Dichte führen nur zu kleinen Änderungen beim Radius, da dankenswerterweise der kleine Exponent von $\frac{1}{6}$ eine Änderung stark abschwächt. Daher können wir $R = 2 \cdot 10^7 m$ wählen. Wir berechnen nun den Fermiimpuls und die Fermienergie für unser System und vergleichen die entsprechende Temperatur mit der tatsächlichen Temperatur:

$$p_F = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = \hbar \left(3\pi^2 \frac{10^{58}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 2 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \frac{m}{s}$$

$$E_F = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_F^2 c^2} \approx 10^{-11} J \quad \rightarrow \quad T_F = \frac{E_F}{k_B} \approx 10^{10} K$$

Die Temperatur eines WDs liegt um Größenordnungen darunter. Sirius B hat beispielsweise eine Temperatur von ca. 27000K. Wir können deshalb problemlos die vereinfachende Annahme $T = 0$ machen, ohne die Verhältnismäßigkeit zu stören.

3 Jenseits der Grenzmasse

Wie wir gesehen haben, stellt die Chandrasekhar-Grenzmasse eine universale Massengrenze dar für alle Objekte, die nur durch den Entartungsdruck von Fermionen stabilisiert werden. Natürlich stellt sich unweigerlich die Frage, was beim Überschreiten dieser Grenze passiert.

Ein anschauliches Beispiel liefert die sog. Supernova vom Typ Ia. Diese auch thermonukleare Supernova genannte Erscheinung kann nur in bestimmten Doppelsternsystemen auftreten, in denen ein WD Masse von seinem Begleiter aufsammeln kann. Schafft es der WD, genügend Materie seines Begleiters zu akkretieren und die Chandrasekhar-Grenzmasse zu überschreiten, so wird er instabil. Die dadurch entstehenden explosiven Kernreaktionen zerreißen den WD vollständig weshalb auch kein N^* zurückbleibt. Dieser Vorgang wird von einer enormen Leuchtkraft begleitet, die knapp 5 Mrd. Sonnenleuchtkräfte beträgt. Die Illustration auf dem Titelblatt zeigt eine künstlerische Darstellung eines Doppelsternsystems aus Rotem-Riesen und einem detonierenden WD (Bildquelle: [7]).

Folgende Abbildung zeigt das Aufleuchten einer Supernova in einem Spiralarm der Galaxie.



Aufnahme des Weltraumteleskops Hubble zeigt die Galaxie NGC 4526, in der sich 1994 eine SN Ia ereignete. Bildquelle: [8]

Dies ist nur eine kurze Demonstration eines Beispiels, da die Themen Supernovae Ia und Core-Collapse-Supernovae in separaten Vorträgen behandelt werden.

Literatur

- [1] A. Lenz: "Struktur der Materie III", Skript der Vorlesung SS06
- [2] W. Gebhardt: "Ableitungen Chandrasekhar-Masse", Skript der Vorlesung "Schwarze Löcher" WS99/00
- [3] M. Heise: "Grundgleichungen des Sternaufbaus", Skript für das Ausbildungsseminar "Kerne und Sterne - Nukleare Astrophysik" SS07
- [4] M. Müller: "Polytropen-Modelle: Verlauf von Temperatur und Dichte", Skript für das Ausbildungsseminar "Kerne und Sterne - Nukleare Astrophysik" SS07
- [5] R. Kippenhahn, A. Weigert : "Stellar Structure and Evolution", Springer Verl. 1990, corr. Printing 1991. 84 US 4000 K57
- [6] <http://www.nobelpreis.org/physik/chandrasekhar.htm>
- [7] <http://www.nnv.nl>
- [8] http://www.mpe.mpg.de/~amueller/lexdt_s09.html