(Anti-) de Sitter Metriken in Kosmologie und theoretischer Physik

Patrick Mangat

Referat zur Vorlesung Kosmologie

16. November 2011

Idee und Eigenschaften der de Sitter Metrik

Die Geburt der kosmologischen Konstante

- Keine statischen kosmologischen Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen der Form

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- Einstein führte deshalb 1917 die kosmologische Konstante Λ ein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Konstruktion eines statischen Universums

- Friedmann-Gleichungen liefern

$$0 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{R_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$0 = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

- Lösung:

$$\rho = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G} \overset{!}{>} 0 \qquad (\text{d.h. } \Lambda > 0)$$

$$K = +1$$

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$$

- Problem: instabile Lösung

Die de Sitter Metrik

- Betrachte ein euklidisches ($K = 0$) Universum mit $\Lambda > 0$ sowie $\rho = P = 0$ (de Sitter Universum)

$\rightarrow$ Dieses wird beschrieben durch die folgende DGL:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} \equiv H_0$$

$\rightarrow$ Exponentielle Ausdehnung

$$a(t) = \exp\left(H_0 t\right)$$

Die de Sitter Metrik

- Einsetzen von $a(t)$ in die Robertson-Walker-Metrik ergibt die *de Sitter Metrik*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2H_0 t} \left(dx^2 + dy^2 + dz^2 \right)$$

- Gefunden von Willem de Sitter (1872-1934, holländischer Astronom) im Jahr 1917 (und unabhängig von Levi-Civita)[1]

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/De-Sitter-Raum

Mathematische Beschreibung

- Forminvarianz bei Translation $t \to t + T_0$, falls $x_i \to e^{H_0 T_0} x_i$.
- Mit dem Krümmungsskalar für die RWM (vgl. Übungen)

$$R = \frac{6}{a^2}\left(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + Kc^2\right)$$

ergibt sich für die de Sitter Metrik

$$R = 4\Lambda c^2 = \mathrm{const.}$$

Horizonte im de Sitter Raum

Für Nullgeodäten gilt die Gleichung

$$c^2 dt^2 - e^{2H_0 t} dr^2 = 0.$$

Also ist

$$dr = e^{-H_0 t} c dt.$$

- Ereignishorizont:

$$r_{\mathrm{EH}} = c \int_t^{\infty} e^{-H_0 t'} dt' = \frac{c}{H_0} e^{-H_0 t} < \infty$$

- Teilchenhorizont:

$$r_{\mathrm{TH}} = c \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} e^{-H_0 t'} dt' = \infty$$

Anwendungen der de Sitter Metrik in der Kosmologie

de Sitter Metrik und das Standardmodell

- Drei Hauptprobleme der Kosmologie:
  - Warum weist das Universum flache Geometrie auf? (fine-tuning)
  - Warum finden wir keine magnetischen Monopole?
  - Warum ist der CMB so isotrop?
- Diese Probleme werden durch eine Phase mit exponentieller Expansion (Inflation) auf natürliche Weise gelöst.
- Wie diese kurze Phase eintreten und stoppen konnte, ist ein Kapitel für sich...
- Da $\Lambda > 0$, nähert sich das Expansionsverhalten asymptotisch einer Exponentialfunktion.

Der Anti de Sitter Raum und seine Anwendungen

Definition und Eigenschaften

- AdS-Metrik ist Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen für $\Lambda < 0$.
- In geeigneten Koordinaten beschreibt die AdS-Metrik eine statische Raumzeit (global möglich).
- Wegen $\Lambda < 0$ negative Krümmung, d.h. hyperbolische Geometrie.
- Warum ist die AdS-Metrik so interessant, wenn sie offenbar nichts mit der Realität zu tun hat?

Die AdS/CFT-Korrespondenz

- J. Maldacena (1997): Vermutung einer Dualität zwischen Gravitation auf einer AdS-Metrik und einer Konformen Feldtheorie (CFT)

$\rightarrow$ Insbes.: Stringtheorie (Typ IIB) auf $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ dual zu einer (supersymmetrischen, $\mathcal{N} = 4$) CFT auf $\partial\,(\mathrm{AdS}_5)$

$\rightarrow$ Spezialfälle (hohe Temperaturen) erlauben eine AdS/QCD-Korrespondenz

$\rightarrow$ Komplizierte Probleme der QCD können daher im $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ durchgerechnet werden

Forschung dazu an der Uni Regensburg...

- QCD-Gruppe (A. Schäfer, et al.) untersucht diese Korrespondenz
- Neue Diskussionspunkte:
  - Entropieerzeugung in der QCD mit Hilfe der Eigenstate thermalization hypothesis
  - Mit Hilfe der AdS/CFT-Korrespondenz könnte damit eine neue Erklärung der Entropieerzeugung an den Horizonten von Schwarzen Löchern gebracht werden. (Black hole information paradox)

Literatur

- H. Goenner: Einführung in die Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.
- B. Müller, A. Schäfer: Entropy creation in relativistic heavy ion collisions http://arxiv.org/abs/1110.2378 (2011)
- L. Susskind, J. Lindesey: Black Holes, Information and the String Theory Revolution, World Scientific Publishing, Singapore, 2005