



2.2. Einsteingleichung, Friedmann-Lösungen

Die Grundidee der Einsteinschen Gravitationstheorie besteht darin, die Wirkung der Schwerkraft durch die Geometrie der sog. „Riemannschen Raum-Zeit“ auszudrücken. Das dabei zu formulierende physikalische Grundgesetz, die Feldgleichungen der Gravitation, stellt eine Verallgemeinerung dar und kann nicht logisch aus schon bekannten Gesetzen gefolgert werden (vgl. Newtonsche Mechanik \leftrightarrow Quantenmechanik bzw. Newtonsche Bewegungsgleichung \leftrightarrow Schrödinger-Gleichung). Dennoch ist es von großem Vorteil, die Grundtatsachen der speziellen Relativitätstheorie (SRT) einschließlich der entsprechenden mathematischen Methoden im Minkowski-Raum, als bekannt vorauszusetzen, um einen leicht verständlichen Einblick in die allgemeine Relativitätstheorie (ART) zu erhalten.

Die entscheidende Aussage der SRT ist die Invarianz (Kovarianz) der Naturgesetze gegenüber dem Wechsel von Inertialsystemen gemäß den Transformationen der Poincaré-Gruppe. Die mathematische Struktur der physikalischen Gesetze ist dadurch in der Form von Tensorgleichungen festgelegt. Ihre Gültigkeit behalten diese jedoch nur, wenn Gravitationseffekte ausgeschlossen werden. Dies zeigt sich beim Versuch, das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r} \quad (1)$$

bzw. die entsprechende Potentialgleichung

$$\nabla^2 \phi(r) = 4\pi G \rho(r) \quad (2)$$

mit Gravitationspotential ϕ und Massendichte ρ relativistisch zu verallgemeinern. Die aus dem einfachsten Ansatz resultierende Wellengleichung

$$\phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = -4\pi G \rho \quad (3)$$

mit dem skalaren Feld ϕ widerspricht nämlich dem sog. „Äquivalenzprinzip“, wonach jede Energiedichte ebenso wie die Massendichte Quelle des Gravitationspotentials sein sollte. Die Energiedichte ist aber keine skalare Größe, sondern die T^{00} -Komponente des sog. „Energie-Impuls-Tensors“. Ebenso führt eine Kopplung des Gravitationsfeldes ϕ an das elektromagnetische

Strahlungsfeld zu einer skalaren Theorie, in der kein Lichtstrahl durch das Gravitationsfeld abgelenkt werden kann. Dies widerspricht jedoch eindeutig den Beobachtungen. Somit liegt es nahe bei einem weiteren Versuch statt eines skalaren Felds ein symmetrisches Tensorfeld $\phi_{\mu\nu} = \phi_{\nu\mu}$ einzuführen. An die Stelle von Gleichung (3) tritt dann

$$\phi_{\mu\nu} = -4\pi G T_{\mu\nu} \quad (4)$$

mit dem Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ bei der Wahl der Eichung $\partial_{\mu}\phi^{\mu\nu} = 0$. In dieser tensoriellen Theorie wird aber ein Wert für die Perihelverschiebung vorhergesagt, der nicht mit den Beobachtungen des Planeten Merkur übereinstimmt. Grundsätzliche Überlegungen zum Äquivalenzprinzip von Masse und Energie zeigen auch, dass die relativistische Gravitationstheorie eine nichtlineare Theorie ist und die entsprechenden Feldgleichungen komplexer sein müssen als der einfache lineare Ansatz (4).

Physikalische und mathematische Grundlagen

Für die Entwicklung der ART ist nach Einstein, wie in dem vorherigen Abschnitt bereits erläutert wurde, die Äquivalenz von träger und schwerer Masse bzw. Einsteins Äquivalenzprinzip von grundlegender Bedeutung. Zunächst sei daran erinnert, dass man streng genommen in der Newtonschen Mechanik drei verschiedene Arten von Masse eines Körpers zu unterscheiden hat:

- die träge Masse m_I , die gemäß Newtons zweitem Bewegungsgesetz ein Maß für den Trägheitswiderstand eines Körpers entgegen seiner Beschleunigung ist $m_I \ddot{x} = F$
- passive Gravitationsmasse m_G , die als Faktor definiert ist $F = -m_G \nabla \phi$
- aktive Gravitationsmasse M_G , die die Quellstärke des von der Materie erzeugten Gravitationsfelds charakterisiert $\phi = -\frac{GM_G}{r}$

Bemerkenswert ist nun die im Rahmen der Newtonschen Mechanik unverstandene Tatsache, dass diese drei unterschiedliche definierten Massen zueinander äquivalent sind. Auf den Beweis dieser experimentell am besten gesicherten Fakte soll hier nicht näher eingegangen werden. Diese Gleichheit führt nun auf das universell gültige Einsteinsche Äquivalenzprinzip (auch starkes Äquivalenzprinzip genannt):

In einem Gravitationsfeld kann an jedem Weltpunkt ein lokales Inertialsystem gewählt werden, in dem die physikalischen Gesetze der SRT gelten.

Diese Formulierung wird später noch eine entscheidende Rolle bei der Maßbestimmung der gekrümmten Raum-Zeit spielen ($g_{\alpha\beta}(x') = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}$). Mit dieser Grundlage und entsprechender mathematischer Vorbereitung kann daraus bereits die Einsteinsche Gravitationstheorie entwickelt werden. Man sollte hier jedoch noch kurz auf eine weitere grundlegende Idee eingehen, die Einstein als wichtiger Leitgedanke bei der Formulierung seiner Theorie gedient hat, das „Machsche Prinzip“. Nach diesem Prinzip sollte es in einer konsequenten Relativitätstheorie keine Trägheit der Materie gegenüber dem Raum geben, sondern nur Trägheit von Materie gegenüber Materie. Doch lässt

sich die plausible Machsche Idee mit diesem weitreichenden Anspruch bis heute nicht uneingeschränkt in einem theoretischen Rahmen präzisieren.

Wie die vorausgegangenen Betrachtungen gezeigt haben, stellen die Inertialsysteme der SRT eine viel zu eingeschränkte Klasse von Bezugssystemen dar. Das heißt bei der Formulierung einer relativistischen Gravitationstheorie sollte das Relativitätsprinzip offenbar so verallgemeinert werden, dass auch relativ zueinander beschleunigte Bezugssysteme zugelassen sind. Dieses „allgemeine Relativitätsprinzip“ soll nun in mathematischer Form präziser gefasst werden.

Im Gegensatz zu den Relationen zwischen den Inertialsystemen in der SRT sind in der ART beliebige (nichtlineare) Transformationen der Koordinaten zugelassen. Demnach kann das allgemeine Relativitätsprinzip dadurch erfüllt werden, dass man die physikalischen Gesetze nun in kovarianter Form (d.h. als Tensorgleichung) bezüglich allgemeiner Koordinatentransformation schreibt. Die Koordinaten x^μ stellen somit nur noch Markierungen der Weltpunkte in der gekrümmten Raum-Zeit dar. Die allgemeine Transformation wird nach dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip analog zur SRT durch einen metrischen Tensor beschrieben:

$$\begin{aligned} &\text{invariantes Linienelement } ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{mit } \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \\ &\text{nichtlinearer Zusammenhang zwischen zwei Inertialsystemen gemäß der allgemeinen} \\ &\text{Transformation } x^\mu = f^\mu(x') \\ \Rightarrow & ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta := g_{\alpha\beta}(x') dx'^\alpha dx'^\beta \\ &\text{mit dem metrischen Tensor } g_{\alpha\beta}(x') = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \end{aligned} \quad (5)$$

In der Realität treten aber aufgrund inhomogener Felder lokaler Inertialsysteme unterschiedliche Beschleunigungen auf, sodass der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ durch keine Transformation der Koordinaten global in der ganzen Raum-Zeit auf die im Minkowski-Raum gültige Form gebracht werden kann. Daraus ist zu schließen, dass der metrische Tensor (5) die Maßbestimmung in einer nichtebenen, d.h. gekrümmten Raum-Zeit beschreibt. Ausgehend vom Einsteinschen Äquivalenzprinzip gelangt man so zu einer lokalen, geometrischen Beschreibung z.B. des Gravitationsfeldes durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$. Für eine mathematische Formulierung der Raum-Zeit-Krümmung sind differentialgeometrische Begriffe im Riemannschen Raum erforderlich, auf die bereits in 2.1. näher eingegangen wurde.

Es sei wieder zunächst an die Situation im euklidischen Raum der SRT z.B. erinnert. Werden dort zwei in einem Punkt definierte Vektoren bei konstanter Länge und Richtung entlang einer Kurve verschoben, bleiben sie parallel zur Ausgangslage und ihr inneres bzw. skalares Produkt ist entlang der Kurve konstant. Es liegt nun nahe, im allgemeinen Fall die folgende natürliche Forderung zu stellen:

Werden zwei Vektoren A^i und B^i entlang einer beliebigen Kurve parallel transportiert, bleibt das mit der eingeführten Metrik gebildete innere Produkt ungeändert, d.h. es gilt

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{ik} A^i B^k) = 0 \quad (6)$$

Auf Grund der allgemeinen Struktur des Riemannschen Raums ist noch eine Regel, der sog. „affine (lineare) Zusammenhang“, für die Vektorübertragung $A^i(P \rightarrow Q)$ vom Punkt P in den Punkt Q anzugeben. Bei genauerer Betrachtung des Vektortransports treten Koeffizienten Γ_{kl}^i auf, die nur von den Koordinaten in P abhängen. Sie werden deswegen „Koeffizienten des affinen (linearen) Zusammenhangs“ oder auch Übertragungskoeffizienten (kurz Konnektionen) genannt. Es sei ausdrücklich erwähnt, dass die Konnektionen Γ_{kl}^i i.A. keine Komponenten eines Tensors sein können. Bei der Formulierung der Einsteinschen Gravitationstheorie geht man von der (notwendigen) Annahme aus, dass die Γ_{kl}^i symmetrisch sind

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i \quad (7)$$

Sie können dann nach obriger Metrik im Riemannschen Raum allein durch den metrischen Tensor und dessen Ableitungen ausgedrückt werden

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{kl}) \quad (8)$$

In der allgemeinen Gravitationstheorie werden sie „Christoffel-Symbole“ 2.Art genannt und können beim Vergleich mit $g_{\mu\nu}$ als Feldstärke der Gravitation interpretiert werden.

Des weiteren wird i.A. das Ergebnis der Parallelverschiebung zwischen zwei Punkten P und Q von der Wahl der Kurve abhängen. Im Gegensatz dazu ist im flachen Raum der SRT die Parallelverschiebung eines Vektors vom Weg unabhängig. Die Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung hängt mit einem besonders wichtigen Begriff der affinen Geometrie zusammen, dem „Riemannschen Krümmungstensor“, der sich nach kurzer Entwicklung wie folgt ausdrücken lässt:

$$R_{klm}^i = \partial_l \Gamma_{km}^i - \partial_m \Gamma_{kl}^i + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n \quad (9)$$

Hierbei kann gezeigt werden, dass der Krümmungstensor genau dann verschwindet, wenn der Raum flach ist, oder die Parallelverschiebung von Vektoren nicht vom Weg abhängt. Ein direkter Zusammenhang des Riemannschen Tensors mit der Krümmung der Raum-Zeit bzw. mit dem Feldstärkegradienten kann so verstanden werden. Bildet man in lokalgeodätischen Koordinaten, in denen Γ_{kl}^i verschwindet (nicht aber deren Ableitung!), die Ableitung der in (8) definierten Γ_{kl}^i , so folgt nach einer kurzen Rechnung (beachte hier $\partial_l g^{im} = 0$)

$$R_{iklm}^{lok. geod.} = g_{ia} R_{klm}^a = \frac{1}{2} (\partial_k \partial_l g_{im} + \partial_i \partial_m g_{kl} - \partial_k \partial_m g_{il} - \partial_i \partial_l g_{km}) \quad (10)$$

Für den später zu betrachtenden Fall der vierdimensionalen Raum-Zeit, würde man naiv eine Matrix R_{iklm} mit $4^4 = 256$ unabhängigen Elementen erwarten. Nach (10) ist der Tensor aber i.A. antisymmetrisch bei Vertauschung der ersten und zweiten bzw. dritten und vierten Indizes

$$R_{iklm} = -R_{kilm} \text{ bzw. } R_{iklm} = -R_{ikml} \quad (11)$$

Er ist symmetrisch bei Vertauschung des vorderen und hinteren Indexpaars

$$R_{iklm} = R_{lmik} \quad (12)$$

Durch weitere Relationen verringert sich so die Anzahl der algebraisch unabhängigen Komponenten auf maximal 20.

Für die Anwendungen sind Größen wichtig, die aus der Verjüngung des Krümmungstensors resultieren. So erhält man durch Kontraktion den sog. „Ricci-Tensor“

$$R_{kl} = R_{kla}^a = -R_{kal}^a \quad (13)$$

mit der Symmetrie $R_{kl} = R_{lk}$. Durch eine weitere Kontraktion erhält man das sog. „Krümmungsskalar“

$$R := g^{ab} R_{ab} = R_a^a = Sp\{R_{ab}\} \quad (14)$$

Zur Abkürzung kann man den sog. „Einstein-Tensor“

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2} \delta_{ab} R \quad (15)$$

einführen.

Zur Vorbereitung auf die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation sollte man zunächst noch auf die Quelle des Gravitationsfeldes in der Gestalt eines weiteren Tensors, des „Energie-Impuls-Tensors“, näher eingehen. Bei den Anwendungen kann man zur Beschreibung der Gravitationswirkung materieller Systeme von dem Energie-Impuls-Tensor der idealen Flüssigkeit ausgehen. Dieser lautet im lokalen Inertialsystem

$$T_M^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (\mathcal{E} + p) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu} \quad (16)$$

Hier bezeichnet \mathcal{E} die totale Energiedichte und P den isotropen Druck im momentanen Ruhesystem. Der Tensor ist symmetrisch und für abgeschlossene Systeme gilt der differentielle Erhaltungssatz

$$\partial_\nu T_M^{\mu\nu} = 0 \quad (17)$$

Ist ein Gravitationsfeld vorhanden, geht (16) in den allgemeinen kovarianten Ausdruck über

$$T_M^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (\mathcal{E} + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (18)$$

wobei \mathcal{E} und P als Skalare und u^μ als Vektor im Riemannschen Raum aufzufassen sind. Aus der Tensorgleichung (17) wird nach dem Äquivalenzprinzip

$$T_{M;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (19)$$

mit der sog. „kovarianten Ableitung“ $T^{ik}_{;l} := \partial_l T^{ik} + \Gamma_{ml}^i T^{mk} + \Gamma_{ml}^k T^{im}$. Das bedeutet, ausgehend von den lorentzinvariant formulierten Gleichungen erhält man die in der gekrümmten Raum-Zeit gültigen physikalischen Gesetze dadurch, dass man die partiellen Ableitungen durch kovariante ersetzt und anstelle von $\eta_{\mu\nu}$ die Riemannsche Metrik $g_{\mu\nu}$ verwendet. Man beachte jedoch, dass die Übertragungsvorschrift im Fall höherer Ableitungen nicht eindeutig ist, denn im Unterschied zu den partiellen Ableitungen sind kovariante i.A. nicht vertauschbar. Wenn man von (19) aus wieder in ein lokales Inertialsystem übergeht, in dem Änderungen der Krümmung vernachlässigt werden können, würden die Christoffel-Symbole verschwinden und man erhielte wieder (17). (19) kann aber nicht mehr als integraler Erhaltungssatz für Energie und Impuls gedeutet werden, da nun Gravitationskräfte auf die Flüssigkeit wirken und somit das System nicht mehr abgeschlossen ist. Viel mehr sind dem Inhalt nach

(19) die hydrodynamischen Grundgleichungen, welche die Bewegung der Flüssigkeit im Gravitationsfeld beschreiben.

Den Energie-Impuls-Tensor (18) wie auch zu entsprechend anderen Feldern, findet man i.A. über die Lagrange-Funktion. Für ideale Flüssigkeiten in Gravitationsfelder würde man so eine zeitabhängige Lagrange-Funktion finden. Da aber nach dem Noether-Theorem die Energie invariant unter Zeit-Transformation ist und eine physikalische Größe nur dann erhalten bleibt, wenn ihr Generator (also hier die Zeit) nicht in der Lagrange-Funktion vorkommt, kann die Energie wieder nicht als konstant betrachtet werden.

Bedingungen und Eigenschaften

Nach der obigen Vorbereitung der Grundlagen kann man sich nun der Aufstellung der Feldgleichungen der Theorie widmen, die die grundlegende Frage klären sollen, wie denn die Krümmung bzw. die Metrik der Raum-Zeit durch die Energie-Massenverteilung der vorhandenen Objekte bestimmt wird. Wie bereits erwähnt können die gesuchten Gleichungen nicht logisch aus schon bekannten Gesetzen abgeleitet werden, wohl aber durch einige plausibel erscheinenden Forderungen im wesentlichen aufgestellt werden. Solche vernünftigen Annahmen sind:

1. Aufgrund des Äquivalenzprinzips und des allgemeinen Relativitätsprinzips müssen die Feldgleichungen als kovariante Tensorgleichungen formuliert werden.
2. Die Quelle des Gravitationsfeldes ist der symmetrische Energie-Impuls-Tensor der Materie- und Feldverteilung, für den $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ gilt.
3. Die Feldgleichungen sollen, wie die anderen Feldgleichungen der Physik, partielle Differentialgleichungen von höchstens zweiter Ordnung für die zu bestimmenden Potentialfunktionen $g_{\mu\nu}$ sein. Sie sollen linear in den zweiten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ sein und im Newtonschen Grenzfall in die Poisson-Gleichung $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ übergehen.

Die nach den Forderungen 1. und 2. aufzustellenden Feldgleichungen sind also von der Form $X^{\mu\nu} = aT^{\mu\nu}$. Dabei muss der noch zu bestimmende zweistufige Tensor auf der linken Seite symmetrisch und divergenzfrei sein und die Forderung 3. erfüllen. Mit der zusätzlichen Behauptung

(Beweis siehe Anhang [B]), dass der unter (15) definierte Einstein-Tensor $G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$

divergenzfrei ist, d.h.

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{20}$$

besitzt dieser Tensor gerade (als einziger) jene gewünschten Eigenschaften. Somit wird man zwangsläufig zu der Feldgleichung $G^{\mu\nu} = aT^{\mu\nu}$ geführt. Der noch zu bestimmende Proportionalitätsfaktor a ist ein Maß für die Stärke der gravitativen Kopplung und enthält daher die Newtonsche Gravitationskonstante G . Da die Differentialgleichung im Newtonschen Grenzfall in die Poisson-Gleichung übergehen soll, lässt sich der Proportionalitätsfaktor im cgs-System bestimmen zu

$a = -\frac{8\pi G}{c^4}$ und die sog. „Einsteinsche Feldgleichung“ aufstellen

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (21)$$

Die Feldgleichung kann auch in etwas anderen Form geschrieben werden

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) \quad (22)$$

Von diesen $4^2 = 16$ Feldgleichungen sind auf Grund der Symmetrie der Tensoren $g_{\mu\nu}$ und $T_{\mu\nu}$ nur 10 algebraisch unabhängig. Zusätzlich muss noch die sog. Bianchi-Identität (1B), die aus 4 Gleichungen besteht, erfüllt sein, was schließlich zu 6 funktional unabhängigen Feldgleichungen führt. Diese Unbestimmtheit oder Freiheit in der Lösung $g_{\mu\nu}(x)$, die aus 10 unbekannt Funktionen besteht, ist eine notwendige Folge der Kovarianz der Feldgleichungen (vgl. Eichtransformation in der Elektrodynamik). Analog zur Elektrodynamik kann diese Freiheit genutzt werden, um z.B. durch Wahl einer für das Problem geeigneten Eichbedingung die sog. linearisierte Feldgleichung zu entkoppeln. (letzte Gleichung entsteht aus der Entwicklung von $G_{\mu\nu}$ nach Potenzen von $h_{\mu\nu}$ für den Fall kleiner Abweichung vom Minkowskitensor $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$ und gilt als Näherung im Fall schwacher Gravitationsfelder)

Hier wird aber bereits das Problem angesprochen, dass der Einsteintensor $G_{\mu\nu}$ i.A. nicht linear von $g_{\mu\nu}$ und deren ersten Ableitungen abhängt, wonach es kein Standardverfahren (z.B. das Prinzip der linearen Superposition) zur Lösung der Einsteingleichung bei gegebenen Quellen gibt. Ausnahmen sind

1. vorhandene Symmetrien, die den Lösungsweg wesentlich erleichtern
2. exakte Lösungen unter vereinfachten Annahmen
3. Näherungslösungen der linearisierten Feldgleichung im Fall schwacher Felder und geringer Geschwindigkeiten

Herleitung der Friedmann-Gleichungen

Ein Beispiel für 1. stellt das sog. „kosmologische Prinzip“ dar, nach dem im Universum alle Positionen und Richtungen gleichwertig sind. Dies bedeutet, dass die mittlere Dichte überall gleich groß ist (homogen), und die mittleren Geschwindigkeiten bzgl. jeden Beobachtungspunkts zentrale Richtung haben (isotrop). Diese Annahme stellt eine starke Einschränkung an die Raumstruktur des Universums dar, die aber durch die aus 2.1 bereits bekannte Robertson-Walker-Metrik bestens erfüllt wird:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \right) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (23)$$

mit $dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, dr, d\vartheta, d\phi)$

Vergleicht man die rechte und die linke Seite, ergibt sich

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(1, -R^2 \frac{1}{1-kr^2}, -R^2 r^2, -R^2 r^2 \sin^2 \vartheta \right) \quad (24)$$

bzw. $g^{\mu\nu}$ aus der trivialen Relation $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$, wobei δ_μ^λ das Kronecker-Symbol bezeichnet. Die Aufgabe besteht nun darin, die Funktion $R(t)$ aus der Einsteingleichung zu bestimmen, wobei aus der nun bekannten Metrik bereits die linke Seite berechnet werden kann. Mit den Definitionen (8), (13) und (14) aus der Vorbereitung ergeben sich die von null verschiedenen Komponenten für

- das Christoffel-Symbol

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\mu} (\partial_r g_{\mu 1} + \partial_r g_{\mu 1} - \partial_\mu g_{11}) = \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \left(\partial_r \underbrace{g_{01}}_{=0} + \partial_r \underbrace{g_{01}}_{=0} - \frac{1}{c} \partial_t \left(-\frac{R^2(t)}{1-kr^2} \right) \right) = \frac{R\dot{R}}{c(1-kr^2)}\end{aligned}$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{r^2}{c} R\dot{R}, \quad \Gamma_{33}^0 = \frac{r^2}{c} \sin^2 \vartheta R\dot{R}$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{R}}{cR}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1-kr^2) \sin^2 \vartheta$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{R}}{cR}, \quad \Gamma_{12}^2 = r^{-1}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{R}}{cR}, \quad \Gamma_{13}^3 = r^{-1}, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \vartheta$$

Dazu kommen noch alle $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, die durch die Vertauschungsrelation der unteren beiden Indizes nach (7) aus den angegebenen Komponenten hervorgehen.

- den Ricci-Tensor

$$\begin{aligned}R_{00} &= R_{00\alpha}^\alpha = \frac{1}{c} \partial_t \Gamma_{0\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \underbrace{\Gamma_{00}^\alpha}_{=0} + \Gamma_{\beta 0}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^\beta - \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \underbrace{\Gamma_{00}^\beta}_{=0} = \\ &= \frac{1}{2c^2} \partial_t g^{\alpha\beta} \partial_t g_{\alpha\beta} + \Gamma_{10}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^1 + \Gamma_{20}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^2 + \Gamma_{30}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^3 = \\ &= \frac{1}{2c^2} \partial_t \left(2R\dot{R} \frac{1}{1-kr^2} \frac{1-kr^2}{R^2} + \frac{1}{R^2 r^2} r^2 2R\dot{R} + \frac{1}{r^2 R^2 \sin^2 \vartheta} 2R\dot{R} r^2 \sin^2 \vartheta \right) + \sum_{i=1}^3 \Gamma_{i0}^i \Gamma_{0i}^i = \\ &= \frac{1}{2c^2} \partial_t \left(2\frac{\dot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}}{R} \right) + 3 \left(\frac{\dot{R}}{cR} \right)^2 = \\ &= \frac{3}{c^2} \left(\frac{R\ddot{R} - \dot{R}^2}{R^2} \right) + 3 \left(\frac{\dot{R}}{cR} \right)^2 = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{R}}{R}\end{aligned}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{c^2(1-kr^2)} (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2 k), \quad R_{22} = -\frac{r^2}{c^2} (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2 k), \quad R_{33} = R_{22} \sin^2 \vartheta$$

- das Krümmungsskalar

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{6}{c^2 R^2} (R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2 k)$$

Wenn man sich der rechten Seite der Einsteingleichung zuwendet, betrachtet man die Materie des Universums im Großen und im Mittel als kontinuierliche, ideale Flüssigkeit mit dem Energie-Impuls-

Tensor (18) $T_M^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$. Da wie in der SRT auch in der ART stets

$$u_\mu u^\mu = g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = c^2 \quad (25)$$

Gelten muss, nimmt der Tensor im momentanen Ruhesystem ($\rightarrow u^\mu = c\delta_0^\mu$) folgende Form an:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \frac{1}{c^2} (\varepsilon + p) c^2 \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - p g_{\mu\nu} = \\
&= \text{diag} \left(\varepsilon, \frac{pR^2}{1-kr^2}, pr^2 R^2, pr^2 R^2 \sin^2 \vartheta \right)
\end{aligned}
\tag{26}$$

mit $\varepsilon(t) = \rho(t)c^2$ und Massendichte $\rho(t)$

Als Beispiel wird nun die 00-Komponente der Einsteingleichung berechnet:

$$\begin{aligned}
\text{l.S.} \quad R_{00} - \frac{R}{2} g_{00} &= \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{3}{c^2 R^2} (R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2 k) = \\
&= -\frac{3}{c^2 R^2} (\dot{R}^2 + c^2 k) \\
\text{r.S.} \quad -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00} &= -\frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon
\end{aligned}$$

Das ergibt die folgende Zeit-Zeit-Komponente der Einsteingleichung

$$\frac{3}{R^2} (\dot{R}^2 + c^2 k) = \frac{8\pi G}{c^2} \varepsilon
\tag{27}$$

In entsprechender Weise erhält man die Raum-Raum-Komponente, die alle dieselbe Gleichung ergeben

$$\frac{1}{R^2} (2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2 k) = -\frac{8\pi G}{c^2} p
\tag{28}$$

Formt man Gleichung (27) etwas um, erhält man bereits die erste Friedmann-Gleichung (1.FG):

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{c^2}{R^2} k := H^2(t)$$

Des Öfteren wird hier \dot{R}/R durch die sog. Hubblefunktion $H(t)$ ersetzt, wobei es in der Literatur unterschiedliche Definitionen gibt.

Des weiteren wird mit Hilfe von Gleichung (27)

$$\dot{R}^2 + c^2 k = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon R^2
\tag{29}$$

in der Gleichung (28) ersetzt,

$$\frac{1}{R^2} \left(2R\ddot{R} + \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon R^2 \right) = -\frac{8\pi G}{c^2} p
\tag{30}$$

und auf die Form der sog. „zweiten Friedmann-Gleichung“ (2.FG) gebracht

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\varepsilon + 3p)$$

Friedmann-Lösungen

Diese beiden Differentialgleichungen stellen aber zur Bestimmung von 3 unbekannt Funktionen $R(t)$, $\rho(t)$ und $p(t)$ noch kein geschlossenes Gleichungssystem dar. Folglich muss für eine exakte Lösung noch eine Zustandsgleichung $p(\varepsilon)$ vorausgesetzt werden. Dazu betrachtet man zwei Grenzfälle:

1. massendominiertes Universum

Man stellt sich das Universum als inkohärente Staubwolke mit den Galaxien als nicht-relativistische Staubteilchen vor, d.h. der Druck kann gegenüber der Dichte vernachlässigt werden: $p(t) \ll \rho(t)c^2$

2. strahlungsdominiertes Universum

Man betrachtet das Universum annähernd als dichtes Photonengas, in dem die elektromagnetische Strahlung bzw. deren Energie die Quelle des Gravitationsfeldes ist. Somit

gilt aus der Quantenstatistik die Zustandsgleichung: $p(\varepsilon) = \frac{1}{3}\varepsilon$

Für spätere Betrachtungen erweist es sich als zweckmäßig, die 2.FG durch Bedingungen aus der Divergenz des Einstein-Impuls-Tensors (19) zu ersetzen. Für $\mu = 0$ ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} 0 &= T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_\nu T^{0\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^0 T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{0\alpha} = \\ &= \frac{1}{c} \partial_t T^{00} + \Gamma_{11}^0 T^{11} + \Gamma_{22}^0 T^{22} + \Gamma_{33}^0 T^{33} + \frac{1}{2c} g^{\nu\beta} \partial_t g_{\nu\beta} = \\ &= \dots = \frac{1}{c} \dot{\varepsilon} + \frac{3}{c} \frac{\dot{R}}{R} (\varepsilon + p) \quad | \times cR^3 \\ \Rightarrow \quad 0 &= \dot{\varepsilon}R^3 + 3\varepsilon R^2 \dot{R} + 3pR^2 \dot{R} = (\varepsilon R^3)' + p(R^3)' \end{aligned} \quad (31)$$

Nun sollen die Friedmann-Gleichungen für die jeweiligen Fälle exakt gelöst werden.

$$\text{Fall 1} \quad p \ll \varepsilon \quad \xrightarrow{(31)} \quad 0 = (\varepsilon R^3)' + p(R^3)' \approx (\varepsilon R^3)' \quad (31^*)$$

d.h. $\varepsilon R^3 = \text{const.}$

Multipliziert man die 1.FG mit R^3 , ergibt sich

$$R\dot{R}^2 = a - c^2 kR \quad \text{bzw.} \quad \pm dt = \sqrt{\frac{R}{a - c^2 kR}} dR \quad (32)$$

wobei $a := \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon R^3$

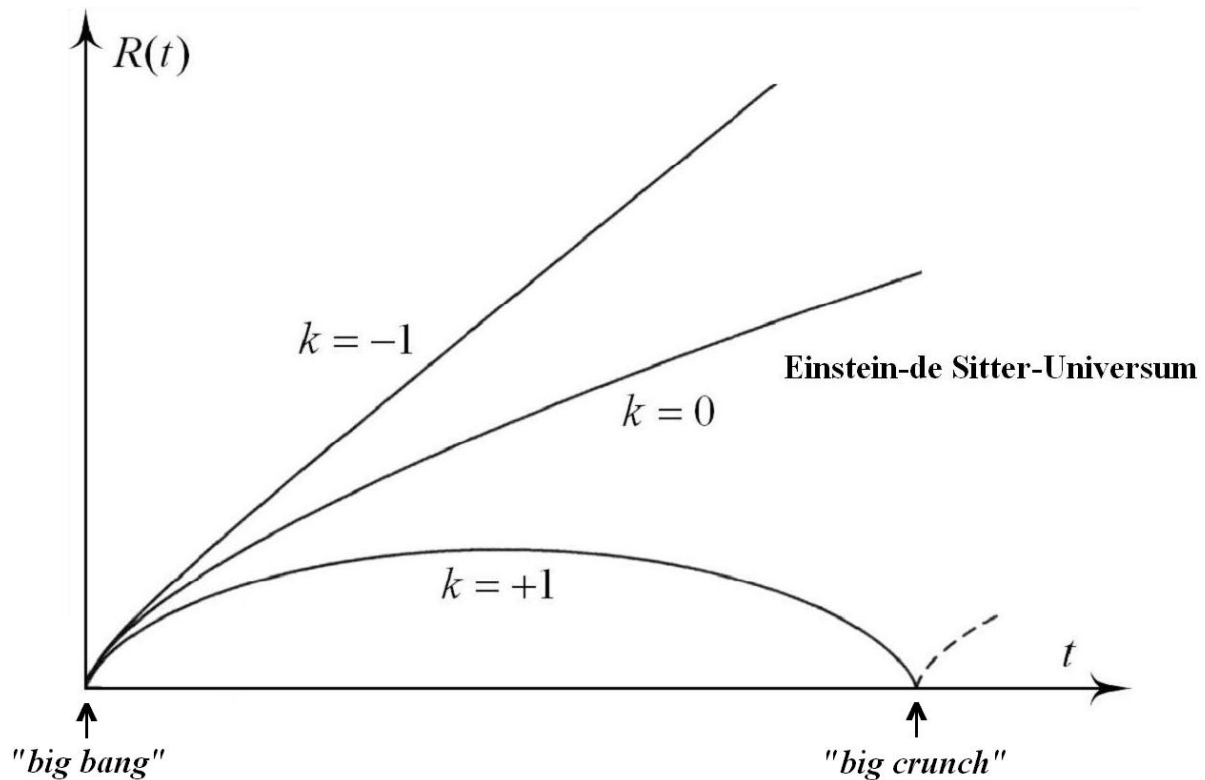
Integriert man auf beiden Seiten, substituiert und setzt die Integrationsgrenze $t_0 = 0$, so folgt die Lösung für

$$k = -1 \quad R(t) = \frac{a}{2c^2} (\cosh u(t) - 1) \quad \text{mit } \pm ct = \frac{a}{2c^2} (\sinh u(t) - u(t))$$

$$k = 0 \quad R(t) = \pm \left(\frac{9}{4} a \right)^{1/3} t^{2/3}$$

$$k = 1 \quad R(t) = \frac{a}{2c^2} (1 - \cos u(t)) \quad \text{mit } \pm ct = \frac{a}{2c^2} (u(t) - \sin u(t))$$

Die Lösungen sollen in der folgenden Abbildung noch einmal verdeutlicht werden



Da für $t = 0$ in allen drei Fällen $R(t = 0) \rightarrow 0$ gilt, muss nach (31*) die Energiedichte der Materie ε unbeschränkt sein. Dies wird als Urknall („big bang“) interpretiert. Im Fall $k = 1$ kontrahiert $R(t)$ nach Erreichen eines maximalen Wertes R_{\max} wieder zum Wert $R = 0$. Der Endzustand wird in der Literatur oft als „big crunch“ bezeichnet. Im Gegensatz zu dieser endlichen Bewegung nähert sich die Geschwindigkeit \dot{R} für $k = 0$ asymptotisch den Wert null, für $k = -1$ dagegen einer Konstanten.

$$\text{Fall 2} \quad p(\varepsilon) = \frac{1}{3}\varepsilon \quad \xrightarrow{(31)} \quad 0 = (\varepsilon R^3)' + \frac{1}{3}\varepsilon (R^3)' = \quad | \times R$$

$$= (\varepsilon R^3)' R + \varepsilon R^3 \overset{p.D.}{\dot{R}} = (\varepsilon R^4)' \quad (31^{**})$$

$$\text{d.h. } \varepsilon R^4 = \text{const.}$$

Analog zum Fall 1 folgt somit für die 1.FG

$$(\dot{R})^2 = b - (cR)^2 k \quad \text{bzw.} \quad \pm dt = \frac{R dR}{\sqrt{b - (cR)^2 k}} \stackrel{k \neq 0}{=} -\frac{1}{kc^2} d(b - (cR)^2 k)^{1/2} \quad (33)$$

$$\text{wobei } b := \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon R^4$$

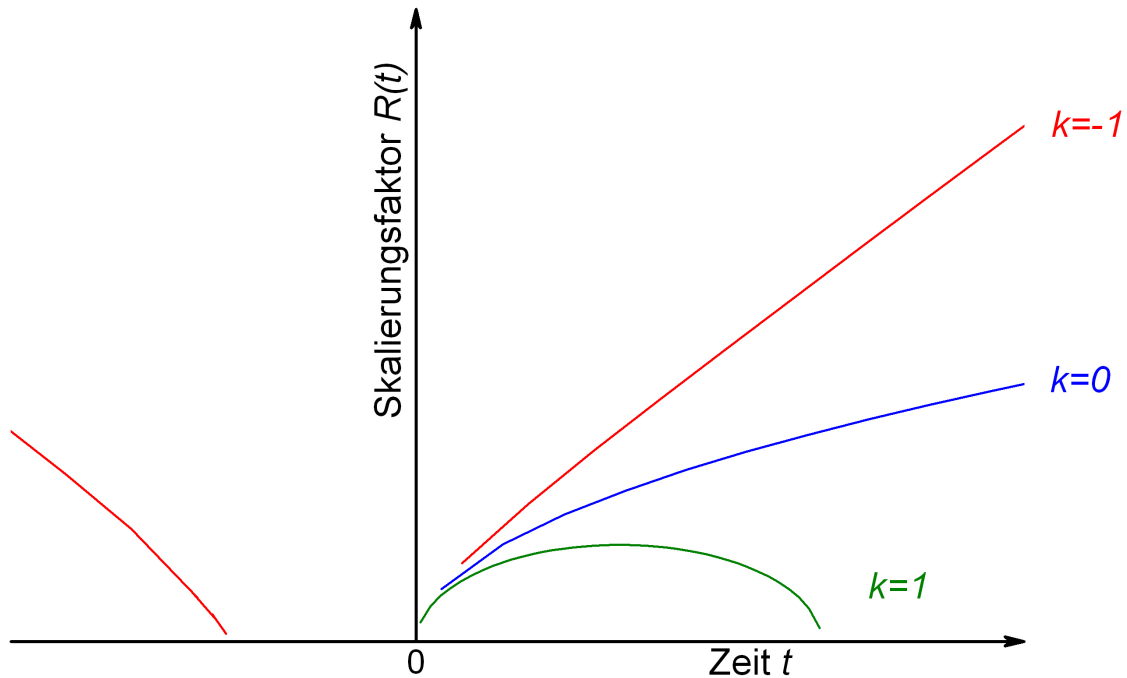
Integriert man auf beiden Seiten und setzt die Integrationsgrenzen $t_0 = 0$ und $0 \leq t \leq \frac{2\sqrt{b}}{c^2}$, so folgt die Lösung für

$$k = -1 \quad R(t) = \sqrt{t(2\sqrt{b} + c^2 t)}$$

$$k = 0 \quad R(t) = b^{1/4} \sqrt{2t}$$

$$k = 1 \quad R(t) = \sqrt{t(2\sqrt{b} - c^2 t)}$$

In allen drei Fällen geht also $R(t) \sim t^{1/2}$ für $t \rightarrow 0$. Dies zeigt sich auch in folgender Abbildung



Da man gern wissen würde, ob die heute verifizierte Expansion später in eine Kontraktion übergehen wird oder nicht, versucht man aus Beobachtungen des Weltraums einige Informationen über den jetzigen Zustand zu gewinnen. Unter Berücksichtigung der Verteilung der absoluten Helligkeit von Galaxien, die sog. „kosmologische Rotverschiebung“ und die Evolution des Kosmos wird jedoch eine direkte Bestimmung der Krümmung verhindert. Experimentell eher zugänglich sind dagegen die Hubble-Konstante $H_0 := \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}$, der Verzögerungsparameter $q_0 := -\frac{\ddot{R}(t_0)R(t_0)}{(\dot{R}(t_0))^2}$ und die heutige Energie-Massen-Dichte im Universum $\varepsilon_0 := \varepsilon(t_0)$, wobei t_0 die gegenwärtige Zeit angibt. Um zunächst die allgemeinen Friedmann-Gleichungen eleganter zu formulieren, werden weitere dimensionslose Funktionen eingeführt:

$$\text{die sog. „kritische Energie-Massen-Dichte“ } \varepsilon_c := \frac{3H^2 c^4}{8\pi G}$$

$$\text{eine allgemeine Dichtefunktion } \Omega := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = \sum \Omega_i$$

$$\text{der sog. „Krümmungsparameter“ } \Omega_k := -\frac{kc^2}{H^2 R^2}$$

$$\text{der sog. „kritische Druck“ } p_c := \frac{c^4 H^2}{8\pi G} = 3\varepsilon_c$$

$$\text{eine Druckfunktion } \chi := \frac{p}{p_c}$$

Mittels dieser Größen lassen sich die 1. und 2.FG in folgende Form bringen:

$$H^2 = H^2 \Omega + H^2 \Omega_k \text{ bzw. } 1 = \Omega + \Omega_k \quad (34)$$

$$-H^2 q = -\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 q = \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{1}{2}c^2 H^2 \Omega - \frac{1}{2}c^2 H^2 \chi = -\frac{1}{2}c^2 H^2 (\Omega - \chi) \text{ bzw. } q = \frac{1}{2}c^2 (\Omega - \chi) \quad (35)$$

Hieraus lassen sich explizit die Funktionen $H(t)$, $\Omega(t)$, $q(t)$ und $\chi(t)$ für die jeweiligen Fälle berechnen bzw. umgekehrt bei bekannten Werten der Parameter die Krümmung k . Tabelle [A] zeigt neben diesen theoretischen Werten auch einen Vergleich mit den experimentell ermittelten Werten aus der Gegenwart. Es zeigt sich bei Summation von $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ und Ω_k eine deutliche Abweichung vom erwarteten Wert 1. Dies soll für eines der folgenden Kapitel nur *eine* Motivation zur Einführung der sog. „Vakuumenergiedichte“ Ω_Δ sein.

Schlussbemerkung und Ausblick

Wenn der Zusammenhang zwischen ε und p bekannt ist, kann also $R(t)$ durch Lösung der Friedmann-Gleichungen berechnet werden. $R(t)$ ist dann eine globale Aussage über das jeweilige Universum, was aber auf Grund der Voraussetzung des kosmologischen Prinzips (Homogenität und Isotropie unter Ausschluss von Dichtefluktuationen) nicht im Widerspruch zur ART steht, die immer nur *lokale* Aussagen zulässt. Es sei ausdrücklich erwähnt, dass über die Topologie des Raums keine Angaben gemacht wurden (eine Zylinderoberfläche ist wie die Ebene ebenfalls ein „flacher Raum“, besitzt aber eine andere Topologie!). Auch das Bild der Kugel aus der Newtonschen Kosmologie taucht bei der Herleitung der Friedmann-Gleichungen nicht mehr auf, sodass das imaginäre Universum nicht mehr von einem ausgezeichneten Punkt aus wegexpandieren kann (es gibt kein Mittelpunkt des Universums!).

Wenn man die Entwicklung der Einsteingleichung genauer betrachtet, ist durchaus auch die Addition eines zur Metrik proportionalen Terms $\Delta g_{\mu\nu}$ zulässig. Der verallgemeinernde, konstante Faktor Δ ist eine skalare Größe und wird „kosmologische Konstante“ genannt. Sie wurde ursprünglich von Einstein als phänomenologischer Term eingeführt, um die Existenz einer stationären Lösung der Feldgleichungen zu ermöglichen. Nach langer, wechselvoller Geschichte hat die Konstante dennoch überlebt (Einstein nannte die Einführung später „den größten Schnitzer meines Lebens“) und wird im übernächsten Kapitel näher besprochen.

Anhang

[A] Übersichtstabelle

	Separations-Konstante k	Dichte-funktion $\Omega(t)$	Hubble-Funktion $H(t)$	Verzögerungsparameter $q(t)$
massen-dominiert	<0	<1	-	$<\frac{1}{2}$
	0	1	$\frac{2}{3}(ct)^{-1}$	$\frac{1}{2}$
	>0	>1	-	$>\frac{1}{2}$
strahlungs-dominiert	<0	<1	-	<1
	0	1	$(2ct)^{-1}$	1
	>0	>1	-	>1
experimentell	$\Omega_k = -0,09 \pm 0,1$ $\Rightarrow k \cong 0$	$\Omega_{m,0} = 0,29 \pm 0,02$ $\Omega_{b,0} = 0,042 \pm 0,004$	$H_0 = (72 \pm 7) \frac{km}{sMpc} =$ $= (2,35 \pm 0,06) \cdot 10^{-18} \frac{1}{s}$	$\Omega_{r,0} = (4,67 \pm 0,26) \cdot 10^{-5}$

[B] Beweis mit Bianchi-Identität

Am besten beweist man die Behauptung (20) mit einer Identität über die Krümmungstensoren, die sog. „Bianchi-Identität“:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} + R_{\alpha\beta\delta\lambda;\gamma} + R_{\alpha\beta\lambda\gamma;\delta} = 0 \quad (1B)$$

Da man zur Berechnung dieser Identität das Koordinatensystem frei wählen darf, benutzt man unter eventueller Koordinatentransformation wieder flache, lokalgeodätische Koordinaten, in denen die Konnektionen $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ verschwinden. Mit (10) ergibt sich dann

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} = \partial_{\lambda} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \partial_{\lambda} \left(\delta_{\alpha} \partial_{\delta} g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} \partial_{\gamma} g_{\alpha\delta} - \partial_{\beta} \partial_{\delta} g_{\alpha\gamma} - \partial_{\alpha} \partial_{\gamma} g_{\beta\delta} \right) \quad (2B)$$

Setzt man dies nun in die linke Seite von (1B) ein, erkennt man, dass alle Terme verschwinden. (1B) lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} 0 &= R_{\beta\gamma\delta;\lambda}^{\alpha} - R_{\beta\lambda\delta;\gamma}^{\alpha} - R_{\beta\gamma\lambda;\delta}^{\alpha} = && \left| \times \delta_{\alpha}^{\gamma} g^{\beta\delta} \right. \\ &= R_{;\lambda} - R_{\lambda;\gamma}^{\gamma} - R_{\lambda;\delta}^{\delta} = && \left| \gamma \rightarrow \delta \right. \\ &= R_{;\lambda} - 2R_{\lambda;\delta}^{\delta} \end{aligned} \quad (3B)$$

Daraus folgt

$$G_{\lambda;\delta}^{\delta} := R_{\lambda;\delta}^{\delta} - \frac{1}{2} g_{\lambda}^{\delta} R_{;\delta} = \frac{1}{2} R_{;\lambda} - \frac{1}{2} R_{;\lambda} = 0 \quad (4B)$$

□

[C] Formelsammlung

kovariante Ableitung:

$$A_{\mu;\nu}^{\lambda} = \partial_{\nu} A_{\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} A_{\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} A_{\rho}^{\lambda}$$

Christoffelsymbole:

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\partial_{\rho} g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} g_{\alpha\rho} - \partial_{\alpha} g_{\nu\rho} \right)$$

Riemannscher Krümmungstensor:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu} \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}$$

Ricci-Tensor

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho}^{\rho} = -R_{\mu\rho\nu}^{\rho}$$

Krümmungsskalar

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Einsteinsche Feldgleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Robertson-Walker-Metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \right)$$

Friedmann-Gleichungen

$$1. \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{c^2}{R^2} k := H^2(t)$$

$$2. \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\varepsilon + 3p)$$

[D] Literaturangabe

- (1) Ulrich E. Schröder, *Gravitation*, (Verlag Harri Deutsch, 2007)
- (2) Hubert Göner, *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, (Spektrum Akademischer Verlag, 1996)
- (3) Torsten Fließbach, *allgemeine Relativitätstheorie*, (BI Wissenschaftsverlag 1990)
- (4) J. N. Islam, *an introduction to mathematical cosmology*, (Cambridge University Press, 1992)