

Der inflationäre Kosmos

Benjamin Söll

20.01.2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

2 Probleme des Standardmodells

- 2.1 Das Horizontproblem
- 2.2 „Problem of Large-Scale Structure“
- 2.3 Das flache Universum
- 2.4 Monopole

3 Das inflationäre Paradigma

- 3.1 Das „DeSitter-Modell“
- 3.2 Inflation und das Flachheitsproblem
- 3.3 Inflation und das Horizontproblem
- 3.4 Inflation und das Monopolproblem

4 Das Inflatonfeld

- 4.1 skalare Felder und Symmetriebrechung
- 4.2 Inflation mit skalaren Feldern
- 4.3 Das Szenario der chaotischen Inflation

5 Zusammenfassung

1 Einführung

Das Standardmodell (Standard Big Bang, SBB) beruht nur auf sehr wenigen Annahmen: Neben dem kosmologischen Prinzip, d.h. der Isotropie und Homogenität des Kosmos, und der Gültigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie geht es davon aus Materie als ideale Flüssigkeit behandeln zu können. Das so gebildete Modell wurde durch einige Beobachtungsergebnisse, wie der Hubble-Expansion, der Nukleosynthese, also der Entstehung der ersten Elemente, oder der Mikrowellen-Hintergrundstrahlung gestützt. Allerdings ergaben sich aus dem SBB auch einige noch einige nicht beantwortete Fragen bzw. Problem auf die im folgenden Abschnitt eingegangen werden sollen.

2 Probleme des Standardmodells

2.1 Das Horizontproblem

Bei genauer Betrachtung der kosmischen Hintergrundstrahlung (Cosmic Microwave Background, CMB) treten die ersten Probleme auf. COBE- und WMAP-Experimente haben gezeigt, dass die Inhomogenitäten sehr gering sind und man eine nahezu perfekte Schwarzkörperstrahlung (2,725 K) erhält. Das Standardmodell kann zwar die Entstehung der Hintergrundstrahlung an sich erklären, nicht aber deren Homogenität:

Da der heute sichtbare Bereich des Universums damals gar nicht im kausalen Zusammenhang miteinander gestanden haben kann, müsste das Universum in den kausal unabhängigen Bereichen schon von Beginn an homogen gewesen sein. Viel natürlicher wäre es allerdings von chaotischen Anfangsbedingungen auszugehen. Wie kann man also die Homogenität des CMB erklären?

Wir betrachten sogenannte Geodäten (Lichtkegel), die sich in der Robertson-Walker-Metrik aus $ds^2 = 0$ ergeben:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} \right] = 0 \quad (1)$$

Wir wählen die Winkel so, dass $d\theta = d\phi = 0$. Damit erhalten wir:

$$cdt = \frac{a(t)dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2)$$

Nach Integration erhält man mit dem Zeitpunkt der Entkopplung t_{CMB} und heute (t_0) mit $c=1$:

$$\int_0^{t_{CMB}} \frac{dt}{a(t)} \ll \int_{t_{CMB}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (3)$$

Der Teilchenhorizont ist heute also sehr viel größer als zum Zeitpunkt seiner Entkopplung. Mit Hilfe der Entropie S , die als Maß für die Anzahl der Zustände innerhalb des Modells dient, ergeben sich etwa 10^5 kausal unabhängige Bereiche. Für dieses Paradoxon bietet das Urknallmodell keine Lösung.

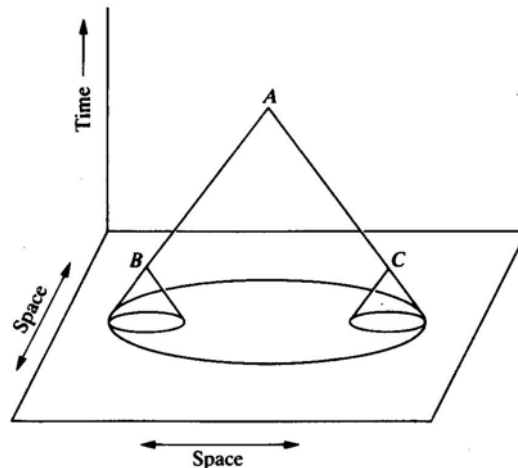


Abb. 1: Wir beobachten heute (d.h. bei A) kosmische Mikrowellenstrahlung (CMB), die aus ganz verschiedenen Regionen des Kosmos kommt, ohne dass sich Unterschiede (bis auf Anisotropien $<10^4$) feststellen lassen. Allerdings war die Zeit, die seit dem Beginn des Universums vergangen ist, zu kurz zum Austausch von Lichtsignalen zwischen A und B.

2.2 „Problem of Large-Scale Structure“

Nicht nur die hohe Homogenität führt allerdings zu Schwierigkeiten, auch die kleinen Fluktuationen in der Hintergrundstrahlung lassen sich mit dem Standardmodell nicht erklären. Diese dienen als Keime für die spätere Struktur des Kosmos, also z.B. Galaxienhaufen. Nach dem SBB müssten für ein expandierendes Universum sehr viele Parameter wie die Gesamtenergiedichte oder die Krümmung sehr genau eingestellt worden sein, bereits geringe Abweichungen hätten dramatische Auswirkung auf die Vorhersage für das heutige Universum. Man spricht hierbei von einem „fine-tuning“-Problem, wie auch das flache Universum eines darstellt.

2.3 Das flache Universum

Auch die praktisch verschwindende Krümmung des heutigen Universums stellt ein Problem für das Urknallmodell dar. Diese lässt sich als Abweichung von der kritischen Dichte darstellen:

$$\Omega - 1 = \frac{\rho}{\rho_c} - 1 \quad (4)$$

Mit der Friedmanngleichung

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (5),$$

sowie

$$\Omega = \rho / \rho_0 \quad \text{und} \quad \rho_c = 3H^2 / 8\pi G \quad (6)$$

erhält man:

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H(t)^2} \quad (7)$$

Mit den Beziehungen für Materie- bzw. Strahlungsdominanz

$$a_M \propto t^{2/3} \quad (8)$$

$$a_M \propto t^{1/2} \quad (9)$$

Erhält man

$$|\Omega - 1| \propto t^{2/3} \quad (10)$$

$$|\Omega - 1| \propto t \quad (11)$$

Für $k \neq 0$ entfernt sich das Universum also von selbst von der kritischen Dichte. Wir haben es also wieder mit einem „fine-tuning“-Problem zu tun:

Um einen Werte $\Omega \approx 1$ zu erreichen muss dieser zu früheren Zeitpunkten sehr genau eingestellt worden sein:

$$\text{Zum Zeitpunkt der Entkopplung:} \quad |\Omega - 1| \approx 10^{-16}$$

$$\text{Zur Planck-Zeit (10}^{-43}\text{s):} \quad |\Omega - 1| \approx 10^{-60}$$

Außer dem Spezialfall eines wirklich euklidischen Universums gibt es im Standardmodell keine Möglichkeit solch ein fine-tuning zu vermeiden, außer den Spezialfall $k=0$.

2.4 Monopole

Zu frühen Zeitpunkten ($z > 1000$) wird das Universum gut durch die Teilchenphysik beschrieben. Beim Abkühlen des heißen Universums kommt es zu Symmetriebrüchen, die zu Phasenübergängen führen. Als Konsequenz bilden topologische Defekte, wie etwa domain-walls, strings oder Monopole – Punktdefekte, bei denen das Feld radial nach außen zeigt.

Man kann als Analogon den Ferromagnetismus aus der Festkörperphysik betrachten: Wird ein Ferromagnet über eine kritische Temperatur, die Curie-Temperatur, erhitzt, sind die elementaren magnetischen Momente nicht mehr ausgerichtet, die Symmetrie ist erhalten. Bei Abkühlung unter die Curie-Temperatur bricht diese Symmetrie, da sich spontan sog. Weiss-Bezirke in denen die Momente ausgerichtet sind. Die Richtung ist dabei zufällig. Es bilden

sich also zwischen den Bereichen unterschiedlicher Vakuumerwartungswerte der Magnetisierung domain-walls aus.

Berechnet man die Anzahl der Monopole die bei Ereignissen wie der Symmetriebruch der elektroschwachen Kraft entstehen, so erhält man einen extrem großen Wert. Sie müssten als den größten Anteil der Materie im Universum ausmachen, obwohl sie bis jetzt weder direkt noch indirekt beobachtet werden konnten. Außerdem würden sie Krümmung des Universums beeinträchtigen und bleiben deshalb, wie auch domain-walls unerwünschte Relikte des heißen Urknalls.

3 Das inflationäre Paradigma

Zwar können einige der oben genannten Problem auch auf andere Art und Weise gelöst werden – mit Hilfe der Stringtheorie lässt sich zum Beispiel die fehlende Fluktuation im Strahlungshintergrund begründen – aber nur den Modellen der Inflation ist es bisher gelungen alle Probleme lösen. Den verschiedenen Inflationsmodellen ist allen gemeinsam, dass es im frühen Universum eine kurze Phase extrem schneller ($>c$) Expansion gegeben haben muss. Dies stellt keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie dar, da keine Information übertragen wird.

3.1 Das „DeSitter-Modell“

Ein erstes sehr einfaches Modell geht von der Friedmanngleichung aus, bei der eine mögliche kosmologische Konstante Λ mit in die Energiedicht aufgenommen wurde:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (12)$$

Da für die Energiedichte von Materie $\rho_M \propto a^{-3}$ und Strahlung $\rho_S \propto a^{-4}$ gilt, wird die Energiedichte von Λ dominiert und ist zeitlich konstant, da Λ eine Eigenschaft der Raumzeit an sich ist. Also bekommt man, da man auf Grund der raschen Expansion den Krümmungsterm vernachlässigen kann,

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3} \quad (13)$$

mit der Lösung

$$a(t) \propto \exp(Ht) \quad \text{mit } H = \left(\frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda\right)^{1/2} = \text{konst.} \quad (14)$$

Inflation führt also zu einem exponentiellen Anwachsen des Skalenfaktors.

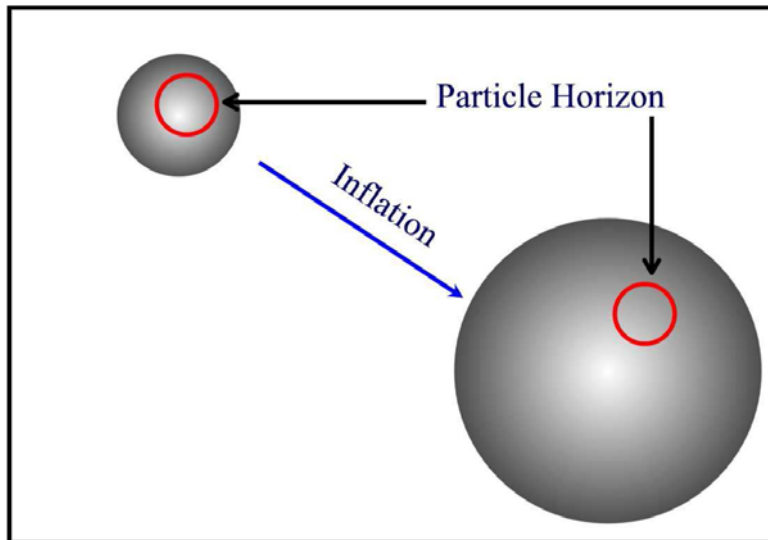


Abb. 2: Inflation als Expansion Skalenfaktors

Inflation kann aber auch aus dem Bezugssystem der mitbewegten Koordinaten betrachtet werden: Da hier die Expansion schneller voranschreitet als sich das Licht ausbreitet, schrumpft der Teilchenhorizont, der sich ja mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

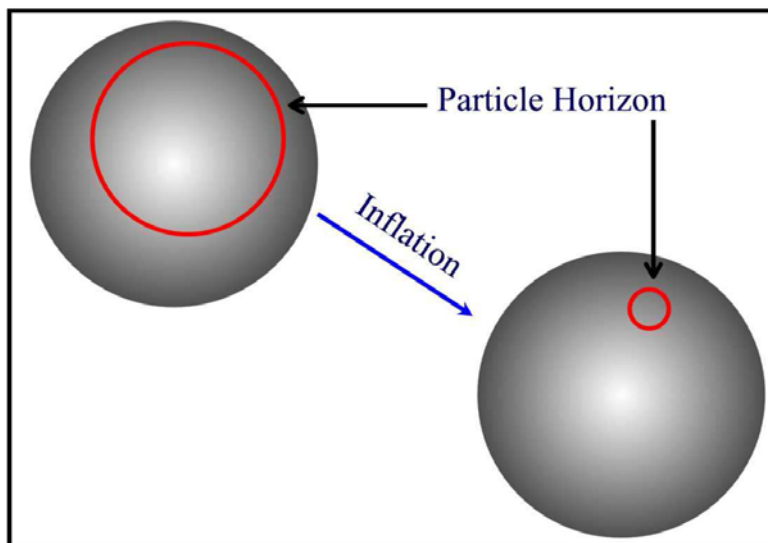


Abb.3: Inflation im Bezugssystem der mitbewegten Koordinaten

3.2 Inflation und das Flachheitsproblem

Aus Gleichung (14) folgt $\ddot{a} > 0$.
Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
H &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\
\Rightarrow \frac{1}{H^2 a^2} &= \frac{1}{\dot{a}^2} \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H^2 a^2}\right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{a}^2}\right) = -2\dot{a}^{-3}\ddot{a} < 0
\end{aligned}
\tag{15}$$

Mit (2.?) ergibt sich damit:

$$\frac{d}{dt} (|\Omega - 1|) = \frac{d}{dt} \left(\frac{|k|}{a^2 H(t)^2}\right) < 0 \tag{16}$$

Die Inflation „flacht“ also die Krümmung Universum ab und bewegt ρ auf ρ_c zu. Dauert die inflationäre Phase also lange genug, so löst sie das Flachheitsproblem.

3.3 Inflation und das Horizontproblem

Der heute sichtbare Bereich des Universums, der Teilchenhorizont, kann vor der inflationären Phase so klein gewesen sein, dass er in kausalem Zusammenhang gestanden ist. Erst durch die Inflation wurde er auf die Größe aufgebläht, die notwendig ist um den heutigen Teilchenhorizont zu erhalten. Dabei geht zwar der kausale Zusammenhang verloren, die Homogenität der Hintergrundstrahlung allerdings bleibt davon unberührt. Somit löst Inflation auch das Horizontproblem.

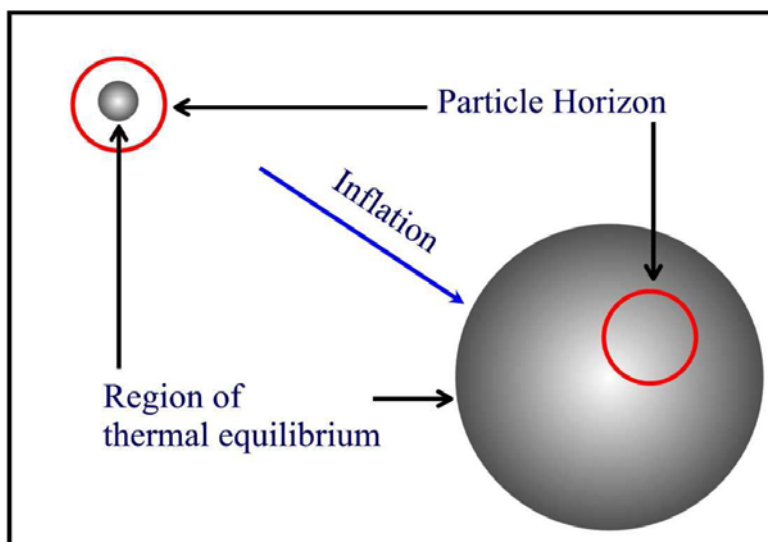


Abb.4: Während der Inflation können sich Regionen, die ein thermisches Gleichgewicht erreicht haben, über den Teilchenhorizont hinaus ausbreiten. Nach der inflationären Phase expandiert die Raumzeit wieder schneller als der Teilchenhorizont.

3.4 Inflation und das Monopolproblem

Auch das Monopolproblem lässt sich mit Inflationsmodellen trivial und anschaulich lösen: Durch die rapide Expansion werden die Monopole so weit verdünnt, dass sie heute nicht mehr sichtbar sind. Die domain-walls verschwinden, da das heute sichtbare Universum nur aus einer Region (mit einer bestimmten Phase) besteht.

Zwar lassen sich schon mit diesem einfachen Modell einige Probleme lösen, allerdings stellt sich die Frage nach den Quellen, die die inflationäre Expansion im frühen Universum ausgelöst haben. Außerdem ist unklar, was zu einem Ende des exponentiellen Wachstums geführt haben könnte („the graceful exit problem“). Ohne einen Ausstiegsmechanismus würde Inflation letztendlich zu einem leeren Universum führen, weswegen dieses erste Inflationsmodell schnell wieder verworfen wurde.

Postuliert man allerdings einfach ein Ende der Inflation, so entwickelt sich das Universum wie im Urknallmodell vorhergesagt. Zuerst kommt es zu einem Wiedererwärmungsprozess, auf den später noch genauer eingegangen wird. Anschließend bilden sich Teilchen und Antiteilchen und die „normale“ Materie überwiegt.

Ein solches, realistischeres Inflationsszenario wurde 1981 von Alan Guth konstruiert, der dabei ein Urfeld suchte, welches die Inflation in Gang gesetzt haben könnte, das so genannte Inflatonfeld.

4 Das Inflatonfeld

4.1 skalare Felder und Symmetriebrechung

Guth beschäftigte sich mit den so genannten GUT-Theorien (Grand Unified Theories): Die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung unterscheiden sich nicht nur in ihrer Wirkung und ihrer Reichweite, sondern auch in ihren Eichsymmetrien, wie z.B. Spin. Deswegen kann man ihnen die Symmetriegruppen $U(1)$, $SU(2)$ und $SU(3)$ zuordnen.

In den 60er Jahren wurde von Glashow, Weinberg und Salam eine einheitliche Theorie der schwachen (Symmetriegruppe $SU(2)$) und elektromagnetischen Wechselwirkung (Symmetriegruppe $U(1)$) konstruiert. Sie gingen dabei von spontaner Symmetriebrechung eines skalaren Feldes, dem sogenannten Higgs-Feld aus, welches beispielsweise wie folgt beschrieben werden kann:

$$V(\phi) = -\mu^2 + \lambda\phi^4 \quad (17)$$

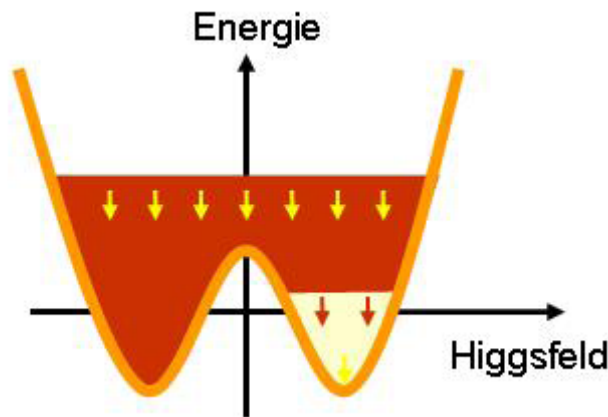


Abb. 5: Das Higgs-Potential aus Gleichung (17)

Bei hohen Energien ist das Potential annähernd symmetrisch ($V(\phi) \approx \lambda\phi^4$), während es bei niedrigeren Energien willkürlich ein Minimum und damit eine willkürliche Phase annimmt. Bei niedrigeren Energien kommt es also zu einem Symmetriebruch, der dazu führt, dass die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung entkoppeln.

Weiter kann man bei vielfach höheren Energien eine alle drei Wechselwirkungen umfassende Symmetriegruppe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ beschreiben, die die elektroschwache und die starke Wechselwirkung vereinheitlicht. Bei Energie von 10^{15} , bei denen Inflation stattgefunden haben könnte, gäbe es also eine umfassende Wechselwirkung, aus der dann als Folge der Abkühlung des Universums durch Brechung der Eichsymmetrien die einzelnen Wechselwirkungen „herauskondensierten“. Diese Entkopplung ist wieder Folge eines Symmetriebruchs des Potentials der skalaren Higgs-Felder.

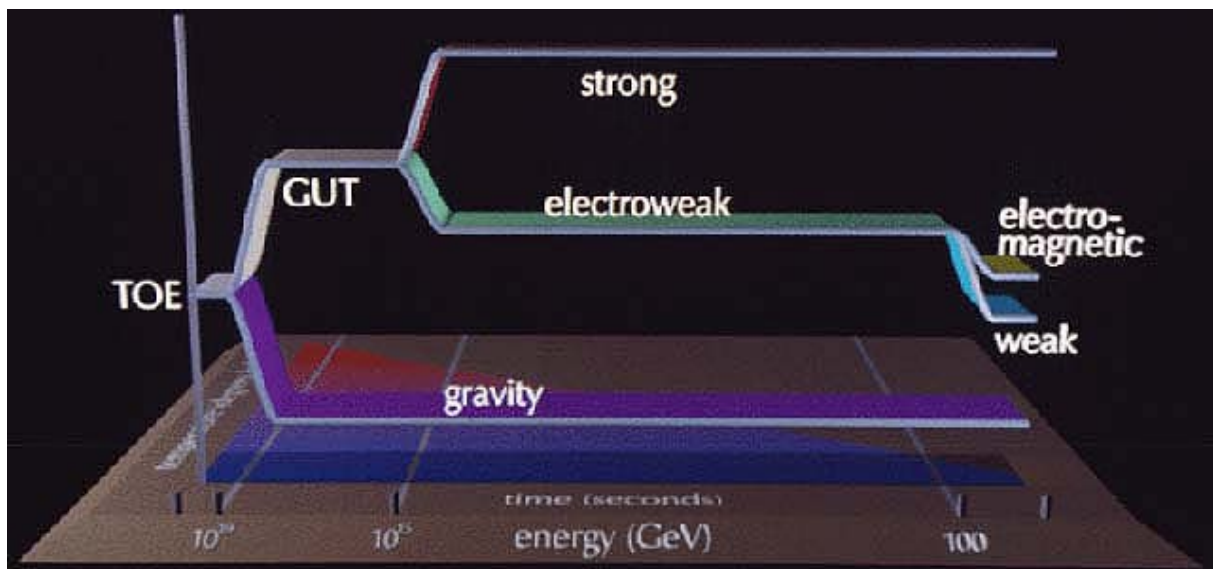


Abb.6: Vereinheitlichende Theorien. Inflation findet bei im Größenordnungsbereich von 10^{15} GeV statt

Zwar erwartet man, dass die eichinvariante Quantenfeldtheorie bis zu 10^{18} GeV, also einem Bereich bei der Wechselwirkungen mit der Gravitation noch keine

Rolle spielen, gültig bleibt. Allerdings sind diese Theorien nur bis zu einigen 100GeV experimentell überprüft worden, weshalb ein Unsicherheitsfaktor bleibt.

4.2 Inflation mit skalaren Feldern

Ein skalares Feld, welches als Inflatonfeld in Frage kommen würde, sollte möglichst unabhängig vom Skalenfaktor $a(t)$ sein. Da man im Gegensatz zur klassischen Mechanik mit ihren diskreten Teilchen von einem kontinuierlichen Feld ausgeht, setzen wir statt der Lagrangefunktion zuerst die Lagrangedichte L an. In der Robertson-Walker-Metrik erhält man:

$$L = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (18)$$

Der Variationsansatz

$$\partial \int L dV dt = 0$$

Ergibt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \cdot g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

wobei $g = \det|g^{\mu\nu}|$.

Nach Einsetzen von $g^{\mu\nu}$ erhält man als Bewegungsgleichung

$$\ddot{\phi} - a^{-2} \nabla^2 \phi + 3c \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

wobei wegen der Homogenität des Feldes $a^{-2} \nabla^2 \phi = 0$.

Für das Potential lassen sich jetzt verschiedene Ansätze machen. Wir können beispielsweise das Higgs-Potential

$$V(\phi) = -\frac{1}{2\lambda} (m^2 - \lambda \phi^2)^2$$

Ansätzen mit $m^2 < 0$ und $\lambda < 0$, welches bei $\phi = 0$ ein Maximum $V(0) = -\frac{m^4}{2\lambda}$ und

zwei Minima bei $x_\pm = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$ besitzt.

Würde das Materiefeld ein solches Potential besitzen, würde sich damit auch erklären lassen wie eine geeignete Energiedichte ρ_Λ zustande kommen könnte, die auch einen Ausstiegsmechanismus beinhaltet. Das Feld könnte vor einem Phasenübergang den metastabilen Zustand bei $\phi = 0$ einnehmen und wäre somit zeitweise konstant. Da die inflationäre Phase nur sehr kurz andauern soll, ist es nötig, dass ρ_Λ schnell wieder abgebaut wird.

Problematisch an diesem Modell ist, dass die Bereiche, die Inflation zeigen, sich wie Gasblasen in einer siedenden Flüssigkeit verhalten. Diese „Blasen“ könnten kollidieren oder zu schnell expandieren. Um dies zu vermeiden, ist wieder ein fine-tuning notwendig, das man ja eigentlich vermeiden wollte. Deswegen ging

man zu Modellen mit Phasenübergänge zweiter Ordnung über, wie z.B. 1982 von Steinhardt und Albrecht vorgeschlagen wurde:

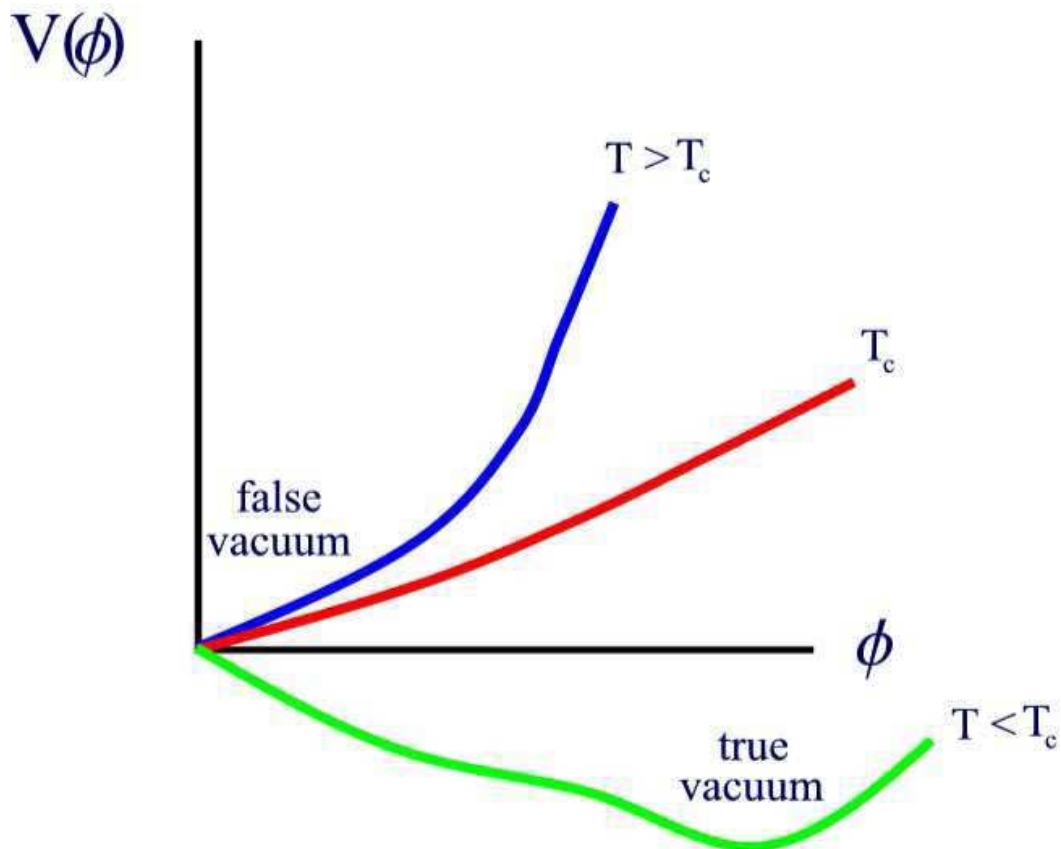


Abb.7: Modell eines neueren Inflationsmodells mit einem Phasenübergang 2.Ordnung der bei Unterschreitung einer kritischen Temperatur T_c eintritt und ϕ in den wahren Vakuumzustand abrollen lässt.

Sinkt bei diesem Potential die Temperatur unter eine kritische Temperatur T_c , kann das Feld in das neue Minimum abrollen.

4.3 Das Szenarium der chaotischen Inflation

Der große Vorteil des „chaotische Inflationsmodells“ von A. Linde (1983) ist, das es ohne spezielle Anfangsbedingungen auskommt. Unter Annahme chaotischer Anfangsbedingungen also, konnte er zeigen, dass Inflation prinzipiell in jedem Modell mit ausreichend flachem Potential möglich ist. Allgemein untersuchte er Potentiale der Form

$$V(\phi) = \frac{\lambda \phi^n}{n M_p^{n-4}}.$$

Im frühen Universum könnten H und ρ beliebig große Werte annehmen und bei Energiedichten $\geq M_p^4$ werden Quantengravitationseffekte so wichtig, dass eine klassische Beschreibung nicht mehr möglich ist. Dies ist erst wieder nach der Planck-Zeit $t_p \approx \frac{1}{6M_p}$ möglich, wenn die Energiedichte kleiner als M_p^4 ist. Es ist

naheliegend vorher einen chaotischen Quantenzustand anzunehmen und davon auszugehen, dass das Feld sich zur Planck-Zeit nicht überall im Potentialminimum befindet. Im Gegenteil sollte es unendlich viele lokal homogene und isotrope Domänen der Größen $l \gg \frac{1}{M_p}$, in denen das Potential Werte zwischen $-\frac{M_p}{\lambda^{1/4}}$ und $\frac{M_p}{\lambda^{1/4}}$ annimmt.

Abb.8:

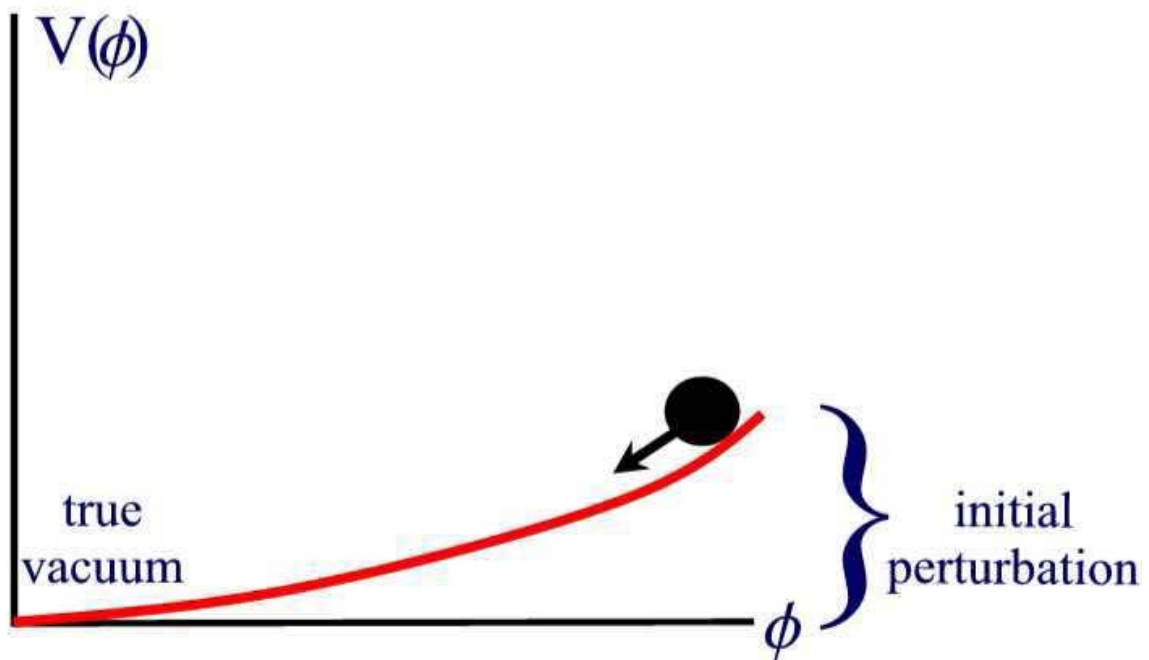


Abb.8: Modell der chaotischen Inflation. Das Inflatonfeld befindet sich vom wahren Vakuumzustand entfernt, d.h. es findet Inflation statt, und beginnt zu diesem zurückzurollen.

In einer solchen Domäne rollt das Feld allerdings nicht, wie man naiv annehmen würde, einfach in das Potentialminimum ab. Durch die Expansion des Raumes entsteht ein Reibungsterm in der Bewegungsgleichung, der gerade ein Abrollen des Feldes verhindert, wodurch sich aber die Expansionsrate des Universums drastisch erhöht.

Um diese Überlegungen quantitativ nachzuvollziehen, betrachten wir den einfachen Fall eines Potentials mit $n = 2$, $\lambda = 1$:

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2$$

Setzt man dieses Potential in (4.?) ein, so erhält man die Gleichung einer gedämpften Schwingung

$$\ddot{\phi} + 3cH\dot{\phi} + m^2\phi = 0$$

Wie man sieht, hängt ist der Reibungsterm proportional zu H. Durch die Expansion des Universums wird also die Schwingung gedämpft. Im aperiodischen Grenzfall, dem „slow roll down“, kann $\ddot{\phi}$ vernachlässigt werden.

Mit $\frac{\partial V}{\partial \phi} = m^2\phi$ erhält man

$$3cH\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Betrachten wir nun den Energie-Impulstensor, der sich mit Hilfe der Feldtheorie aus der Lagrangedichte berechnen lässt:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)\right)$$

Man nimmt jetzt an, dass eventuelle Inhomogenitäten so weit durch die Inflation verdünnt worden sind, dass es wir im Folgenden von einem homogenen Feld ausgehen können. Somit wird $T_{\mu\nu}$ diagonal und vergleichbar mit einer relativistischen Flüssigkeit.

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$$

Damit folgt

$$\rho = T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$$

$$T_{11} = (\partial_1\phi)^2 - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi)\right)$$

$$\Rightarrow T_{11} = (\partial_1\phi)^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$$

T22 und T33 werden analog berechnet und mit

$$p = \frac{1}{3}\sum_i T_{ii}$$

und der Tatsache, dass wir die Gradientenglieder wegen der Homogenität des Feldes vernachlässigen können, bekommt man

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

Damit lässt sich die zweite Friedmanngleichung wie folgt schreiben:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}GV(\phi) + \frac{4\pi}{3}G\dot{\phi}^2 - \frac{k}{a(t)^2}$$

Hier wurde angenommen, dass sich die Energiedichte es skalaren Feldes wie der Λ -Term verhält. Der Krümmungsterm lässt sich wieder vernachlässigen und mit

der reduzierten Planckmasse $\bar{M}_p = \sqrt{\frac{c\hbar}{8\pi G}}$ erhält man ($c=\hbar=1$)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}GV(\phi) + \frac{4\pi}{3}G\dot{\phi}^2 = \frac{1}{3\bar{M}_p^2}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V\right)$$

Aus der 2. Friedmangleichung (ohne Λ -Term)

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

ergibt sich noch eine Bedingung an ϕ : Um exponentielles Wachstum zu gewährleisten, muss $3p < -\rho$ gelten. Um dies mit (4.?) und (4.?) zu erfüllen, muss die sogenannte „slow roll condition“

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi)$$

erhält man also

$$H \approx \frac{8\pi G}{3c^2} V(\phi) = \frac{1}{3M_p^2} \left(\frac{m^2}{2} \phi^2 \right)$$

und aus den Gleichungen (4.?) und (4.?) die Zustandsgleichung

$$p = -\rho$$

Dieser negative Druck wirkt der Gravitation entgegen und erzeugt die Inflation.

Aus Gleichung (4.?) lässt sich ein Expansionsgesetz für den Skalenparameter finden. Dazu differenziert man nach der Zeit, dividiert durch $3H\dot{\phi} = -m^2\phi$, integriert über ϕ und erhalten dann:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln a = -\frac{1}{2M_p^2} \phi \dot{\phi}$$

Also:

$$a(t) = a_i e^{\exp\left(\frac{1}{2M_p^2}(\phi_0^2 - \phi(t)^2)\right)}$$

Mit (4.?) folgt:

$$a(t) = a_i \exp(H\Delta t)$$

Der Skalenfaktor wächst also in der Zeit $\Delta t = H^{-1}$ (Hubble-Zeit) um den Faktor e. Aus der Beziehung zwischen dem Skalenfaktor zu Beginn und am Ende der inflationären Phase

$$a_i \cdot e^N = a_f$$

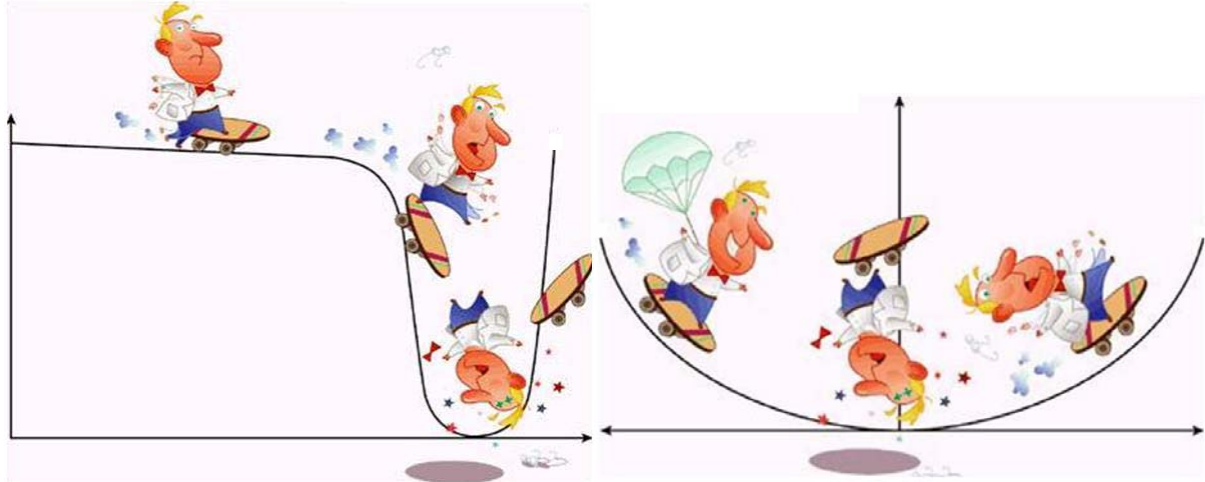
erhält man eine Abschätzung für die Zahl der e-Entfaltungen N:

$$N = \ln \frac{a_f}{a_i} \approx \frac{8\pi}{M_p^2} \frac{\phi_i^2}{4}$$

Für das quadratische Potential $V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2$ bekommt man $N = 2\pi * 10^{12}$, in anderen Modellen aber immer mindestens $N=60$, um das Horizontproblem zu lösen.

5. Zusammenfassung

Die Inflation kann also viele der Probleme des Standardmodells lösen. Dazu geht sie von einem skalaren Felds aus, dessen Feldenergie die beschleunigte ($\ddot{a} > 0$) Expansion für einen kurzen Zeitraum antreibt. Dabei muss weiterhin auch die sogenannte „slow-roll“-Bedingung erfüllt sein, die genaue Form des Potentials und des skalaren Feldes werden dadurch aber nicht vorgegeben.



Nach dem Abrollen des Feldes endet die inflationäre Expansion und das Universum wird wieder durch das kosmologische Standardmodell beschrieben.

In Zukunft besteht die Hoffnung mit genauerer Kenntnis des Fluktuationsspektrums der kosmischen Hintergrundstrahlung einige Potentialmodelle ausschließen zu können.