# Konforme Zeit und Friedmann-Gleichung für $\kappa \neq 0$

Kurzreferat von Daniel Durzinsky

**Erinnerung**: In dem Kapitel "Rotverschiebung und Skalenfaktor" der Vorlesung wird der Weg eines Lichtsignals durch Gleichung (3.23) beschrieben, wobei die Zeit- und Ortskoordinaten getrennt sind:

$$c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_1}^{r_0} \frac{R_0 dr}{(1-\kappa r^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{0.1}$$

Da die rechte Seite nicht zeitabhängig ist, lassen sich die Differentiale zur Jetztzeit $t_0$ und zu einer beliebigen früheren Zeit $t_1$ gleichsetzen. Hieraus folgt:

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)} \tag{0.2}$$

**Konforme Zeit**: Die konforme Zeit wird in der Kosmologie folgendermaßen beschrieben:

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \tag{0.3}$$

Die konforme Zeit wird zum besseren Verständnis auch konformer Abstand bezeichnet, wobei der Unterschied nur aus der Konstanten $c$ besteht. Der konforme Abstand beschreibt den Abstand zwischen Galaxien bevor man den Skalenfaktor $a(t)$ miteinbezieht. Der konforme Abstand zwischen Galaxien ändert sich nicht, sondern die Distanz nimmt zu, da der Raum expandiert. Die konforme Zeit ist der konforme Abstand geteilt durch $c$. Aus Gleichung (0.2) sieht man, dass $\eta$ mit dem Lichtweg bzw. mit dem mitbewegten Abstand zusammenhängt und zwar folgendermaßen:

$$r = c \int_0^t \frac{d\grave{t}}{a(\grave{t})} = c\eta \tag{0.4}$$

**Lösung der 2. Friedmann-Gleichung für $\kappa \neq 0$**: Die 2. Friedmann-Gleichung (2.14) für $\kappa \neq 0$ lässt sich nun mit Hilfe der konformen Zeit lösen. Man erhält mit $dt = a(\eta)d\eta$ aus (0.3):

$$\dot{a}^2 + \frac{c^2\kappa}{R_0^2}a^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^4 \tag{0.5}$$

Nun ersetzt man $\frac{c^2\kappa}{R_0^2} = k$, differenziert nach $\eta$ und teilt durch $a$. Es folgt

$$2\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a} + 2k\dot{a} = \frac{8\pi G}{3}[4\rho a^2\dot{a} + \dot{\rho}a^3] \tag{0.6}$$

Nun ersetzt man $\dot{\rho}$ mit Hilfe von

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(c^2\rho + p) \tag{0.7}$$

Man erhält nun folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{a} + ka = \frac{4\pi G}{3}(c^2\rho - 3p)a^3 \tag{0.8}$$

<u>**Lösung für ein Strahlungsuniversum mit $\rho = \rho_\gamma$ und $p = \frac{1}{3}c^2\rho$:**</u> Es folgt für Gleichung (0.8):

$$\ddot{a} + ka = 0 \tag{0.9}$$

Diese Gleichung kann nun gelöst werden für $\kappa = -1, 0, +1$ in $\frac{c^2\kappa}{R_0^2} = k$. Diese Lösungen lassen sich leicht erkennen. Sie lauten:

$$a(\eta) = \frac{1}{2}a_m sinh(\eta) \tag{0.10}$$
$$a(\eta) = a_m\eta \tag{0.11}$$
$$a(\eta) = a_m sin(\eta) \tag{0.12}$$

Gleichung (0.10) für $\kappa = -1$, (0.11) für $\kappa = 0$ und (0.12) für $\kappa = +1$. Hier ist $a_m$ eine Integrationskonstante und für alle drei Lösungen wurde als Anfangsbedingung $a(\eta = 0) = 0$ gewählt. Zur Findung der Lösungen müssen die Ableitungen von *sinh* und *cosh* bekannt sein. Nun lässt sich aus $dt = a(\eta)d\eta$ die Zeit für jede Lösung durch Integration berechnen für $\kappa = -1, 0, +1$.

$$t = t_m(cosh(\eta) - 1) \tag{0.13}$$
$$t = t_m\frac{1}{2}\eta^2 \tag{0.14}$$
$$t = t_m(1 - cos(\eta)) \tag{0.15}$$

<u>**Lösung für ein Materie gefülltes Universum mit $p = 0$ und $\rho_M a^3 = const.$**</u>: Es folgt für Gleichung (0.8):

$$\ddot{a} + ka = C \tag{0.16}$$

Hier ist $C = \frac{4\pi G}{3}c^2\rho_M^2 a^3 = const.$. Nun wird auch diese Differentialgleichung gelöst für $\kappa = -1, 0, +1$. Die Lösungen lauten:

$$a(\eta) = \frac{1}{2}a_m(cosh(\eta) - 1) \tag{0.17}$$
$$a(\eta) = a_m\eta^2 \tag{0.18}$$
$$a(\eta) = \frac{1}{2}a_m(1 - cos(\eta)) \tag{0.19}$$

Für jede Lösung kann nun die Zeit wieder berechnet werden, analog zum Vorgehen beim obigen Strahlungsuniversum.

**Quellen**:

Anhang 7 zur Vorlesung: "Konforme Zeit, Friedmann-Gl. für $\kappa \neq 0$"
www.physicsforums.com
W. Gebhardt: Skript zur Vorlesung Kosmologie. Anhang A.7.
A. Liddle : An Introduction to Modern Cosmology. 2nd edition Wiley 2007
V. Mukhanov: Physical Foundations of Cosmology. Ch. 1.3.4. Cambridge University Press 2005
A. Liddle, D.H. Lyth: Cosmological Inflation and Large Scale Structure Cambridge University Press 2000