

2. Die Friedmann-Gleichungen in Newtonscher Näherung.

2.1. Skaleninvarianz und Hubble-Konstante

Die homogene Expansion oder Kontraktion ist eine Skalentransformation des Raumes, so dass wir schreiben können

$$\frac{r(t)}{r(t_0)} = \frac{a(t)}{a(t_0)} \quad (2.1)$$

Wenn t_0 die seit Beginn der kosmischen Entwicklung vergangene Zeit ist, dann können wir $a(t_0) = 1$ und $r(t_0) \equiv r_0$ setzen, womit der gegenwärtig gemessene Abstand gemeint ist. Es wird dann

$$\vec{r}(t) = a(t) \cdot \vec{r}_0 \quad (2.2)$$

Der Abstand von zwei Galaxien zur Zeit t wird dann $r(t) = r_0 \cdot a(t)$. Wir setzen voraus, dass ihre Eigenbewegung vernachlässigt werden kann. Dann ist die Geschwindigkeit, mit welcher sie sich durch den Hubble-Fluss voneinander entfernen

$$\frac{d}{dt}r(t) = \dot{a}(t) \cdot r_0 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} a(t) \cdot r_0 \quad (2.3)$$

Wenn wir mit dem Hubble-Gesetz vergleichen

$$v = \frac{\dot{a}}{a} \cdot r(t) = cz \quad (2.4)$$

lässt sich H wie folgt ausdrücken

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.5)$$

Allerdings ist H vermöge Gl. 2.3 zeitabhängig. Für die Gegenwart ($t = t_0$) ist es eine Konstante, eben die Hubble-Konstante

$$H(t_0) \equiv H_0 \quad (2.6)$$

Unsere nächste Aufgabe ist es, aus einer Bewegungsgleichung für $a(t)$ die explizite Zeitabhängigkeit des Skalenparameters zu finden.

2.2. Sphärisches Modell

Um ein Modell des Kosmos zu erhalten, können wir uns die Materie durch ein klassisches Gas realisiert denken. Ein Gas übt allerdings auch einen Druck aus, den wir in der allgemein relativistischen Behandlung später berücksichtigen müssen. Den Druck wollen wir vernachlässigen, weshalb unser Modell nur staubförmige Materie enthalten soll. In einem solchen mit Staub homogen und isotrop erfüllten Kosmos denken wir uns eine Kugel vom Radius r um einen beliebigen Punkt O gelegt. Die Kugel sei durch eine Kugelschale der Masse m abgeschlossen. Die Materie im Innern der Kugel habe die Masse M und übe Gravitation auf die Kugelschale aus. Die kosmische Expansion verändert den Radius r . Die Energie der Kugelschale der Masse m wird dann

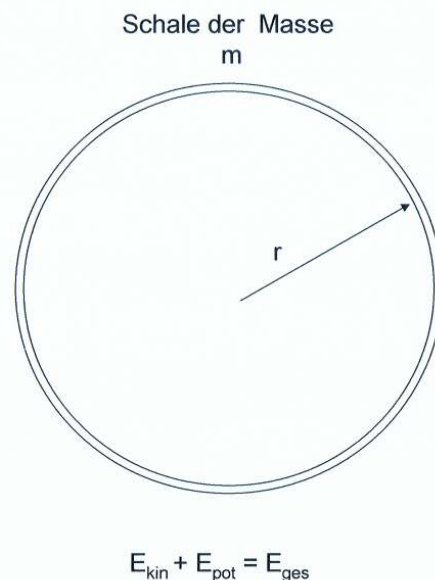


Fig. 2.1. Veranschaulichung der Gravitation, welche eine homogen mit Staub der Masse M gefüllten Kugel auf eine konzentrische Kugelschale der Masse m ausübt.

$$\frac{m}{2}v^2 - m \frac{GM}{r} = E_{\text{ges}} \quad (2.7)$$

Hier ist G die Gravitationskonstante. Der Beitrag der Massen im Außenraum verschwindet, was sich für kosmologische Modelle, bei welchen der Raum beliebig ausgedehnt sein kann, allerdings nur mit Hilfe der Allgemeinen Relativitätstheorie zeigen lässt (s. Birkhoff-Theorem im Anhang A3).

Wir können M durch Dichte ρ

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \quad (2.8)$$

ersetzen. In Gl. 2.7 eingesetzt ergibt das

$$\upsilon^2 - \frac{8\pi G \rho}{3} r^2 = C \quad (2.9)$$

C bedeutet die Gesamtenergie pro Masseneinheit. Im Vorgriff Kap. 3 setzen wir

$$C = -\frac{\kappa \cdot c^2}{2} \quad (2.10)$$

wobei $\kappa = \pm 1, 0$ und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Nach Einsetzen von $r = a \cdot r_0$ und $\upsilon = \dot{a} \cdot r_0$ und Division durch $a^2 r_0^2$ können wir Gl. 2.9 wie folgt schreiben

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho = -\frac{\kappa c^2}{r_0^2} \quad (2.11)$$

Das ist die gesuchte Bewegungsgleichung für $a(t)$, auch 1. Friedmann-Gleichung genannt. Wir werden später sehen, dass in der Interpretation der allgemeinen Relativitätstheorie r_0^2 im Nenner der rechten Seite die Krümmung des Raumes beschreibt.

Die Ableitung von Gl. 2.9 wäre ohne Rückgriff auf die allgemeine Relativitätstheorie nicht einwandfrei. Für die Wechselwirkung von m und M muss die Integration natürlich auch über den Außenraum der Kugel (Fig. 2.1) ausgeführt werden. Wir sind aus der Potentialtheorie gewöhnt, dass der Außenraum nichts beiträgt, wenn die Masse endlich ist. Aber im vorliegenden Fall haben wir es bei einem unendlich ausgedehnten Kosmos auch mit einer unendlich großen Masse zu tun, $M(r \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$. Deshalb ist es keineswegs klar, wie damit im Rahmen der Newtonschen Gravitation umzugehen ist. In der allgemeinen Relativitätstheorie finden diese Fragen eine Lösung durch Birkhoffs Theorem (s. dazu Anhang 3).

Im Vorgriff auf die allgemeine Relativitätstheorie wollen wir noch die Bedeutung der Integrationskonstanten Gl. 2.10 erläutern. Die Friedmann-Gleichung hat zwei Lösungsmengen. Jede enthält unendlich viele Lösungen. Die Lösungen $\kappa = +1$ sind mit einer positiven Raumkrümmung verbunden, die

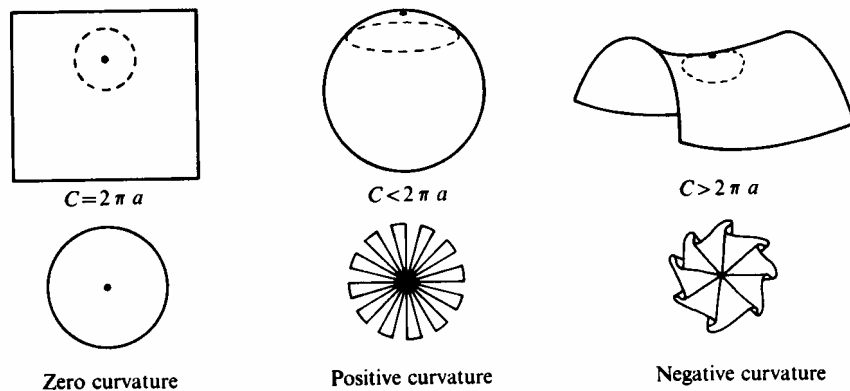


Fig. 2.2. Veranschaulichung der Krümmung durch 2-dimensionale Flächen: Ebene Fläche ($\kappa = 0$), Kugel­fläche ($\kappa = 1$) und hyperbolisch gekrümmte Fläche ($\kappa = -1$). Der Kreisumfang C ist auf der Kugel­fläche kleiner als in der Ebene, am Hyperbelpunkt (negativer Krümmung) größer als in der Ebene.

Lösungen mit $\kappa = -1$ mit einer negativen Raumkrümmung. Die Lösung $\kappa = 0$ beschreibt einen Grenzfall mit verschwindender Raumkrümmung, d.h. mit euklidischer Geometrie (zur Veranschaulichung s. Fig. 2.2). Für den Fall $\kappa = 0$ wollen wir jetzt die Friedmann-Gleichung, Gl. 2.8, lösen, indem wir $t = t_0$ setzen

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{c,0} \quad (2.12)$$

Die Dichte im Falle $\kappa = 0$ heißt kritische Dichte, was durch den Index c ausgedrückt ist. Mit dem Wert von H_0 (Gl. 1.3) findet man

$$\rho_{c,0} = 1,88 \cdot 10^{-26} h^2 \text{ kg/m}^3 = 0,95 \cdot 10^{-26} \text{ kg/m}^3 \quad (2.13)$$

($h = 0,71$). Mit dem Faktor h lässt sich $\rho_{c,0}$ nach dem gegenwärtigen Wert der Hubble-Konstanten, der z. Zt. kaum besser als auf 10% bekannt ist, korrigieren. Es ist weiterhin üblich, die gemessene heutige Dichte ρ_0 in Vielfachen der (heutigen) kritischen Dichte $\rho_{c,0}$ anzugeben

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}} \quad (2.14)$$

Wir werden später sehen, dass die Beobachtungen die Lösung $\kappa = 0$ favorisieren. Die aus astronomischen Beobachtungen abgeleitete Materiedichte macht

allerdings höchstens etwa $0,04 \cdot \rho_{c,0}$ aus. Das Rätsel der anderen 96% Massen- und Energiedichte wird uns später noch beschäftigen.

2.3 Lösungen der Friedmann-Gleichung

Wir wollen jetzt die kosmische Dynamik $a(t)$ für den Fall $\kappa = 0$ berechnen. Dazu brauchen wir noch einen Ausdruck für ρ . Wenn die Masse erhalten bleiben soll, muss für die Massendichte gelten

$$\rho r^3 = \rho_0 r_0^3$$

oder nach Gl.2.1 und 2.2

$$\rho a^3 = \rho_0 \tag{2.15}$$

Dann wird aus Gl. 2.11 mit $\kappa = 0$

$$\dot{a}^2 a = \frac{8\pi G \rho_{c,0}}{3} = H_0^2 t \tag{2.16}$$

wobei wieder die kritische Dichte $\rho_{c,0}$ zur Zeit t_0 auftritt. Die Integration von Gl. 2.16 erfolgt nach Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten

$$\int_0^a \sqrt{a'} da' = \int_0^t \sqrt{H_0^2} dt' \tag{2.17}$$

und ergibt

$$\frac{2}{3} a^{3/2} = H_0 t$$

oder

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 \cdot t \right)^{2/3} \tag{2.18}$$

Gl. 2.18 lässt sich, ausgedrückt durch die Hubble Zeit $H_0 = \frac{1}{t_H}$, auch schreiben

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{t}{t_H} \right)^{2/3} \tag{2.19}$$

oder

$$\frac{1}{z+1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{t}{t_H} \right)^{2/3} \tag{2.20}$$

Gl. 2.18 bis 2.20 beschreiben den Fall $\kappa = 0$, d.h. $\Omega_0 = 1$.

Wir geben noch die Ergebnisse an für $\kappa > 0$ d.h. $\Omega_0 > 1$. Wir erinnern uns, dass Ω_0 die totale Materiedichte in Einheiten der kritischen Dichte bedeutet, die in der Gegenwart gemessen wird (s. Gl. 2.14).

$$a(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} [1 - \cos x] \quad (2.21)$$

mit

$$t/t_H = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} [x - \sin(x)]$$

und für $\kappa < 0$ ($\Omega_0 < 1$)

$$a(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} [\cosh x - 1] \quad (2.22)$$

mit

$$t/t_H = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} [\sinh(x) - x]$$

Die Hubblekonstante gibt jeweils die Steigung bei $t = t_0$ an (s. Fig. 2.3). Die Lösung für $\Omega_0 = 1$ beginnt bei $t = 0$ mit einer unendliche großen Steigung. Die Kurve flacht sich im Laufe der Zeit immer weiter ab. Da für große Zeiten $\rho \rightarrow 0$ geht, verschwindet nach Gl. 2.8 auch die Steigung. Aus Gl. 2.20a erhalten für $z = 0$ die Zeit $t = t_0$, die bis heute vergangen ist, $t_0 = 2/3 \cdot t_H$ und $t_0 = 9,19 \cdot 10^9$ Jahre. Diese Zeit ist kürzer als das Alter der ältesten Sterne. Entweder trifft die Lösung nicht zu oder sie ist unvollständig (mehr dazu in Kap. 5).

Die Lösungen für $\Omega_0 < 1$ haben immer eine nicht verschwindende Steigung. Die Expansion setzt sich bis in alle Ewigkeit fort. In diesem Fall ist die Materiedichte im 2. Glied von Gl. 2.4 nicht groß genug, um sich gegen den ersten Term (kinetische Energie pro Masseneinheit) zu behaupten.

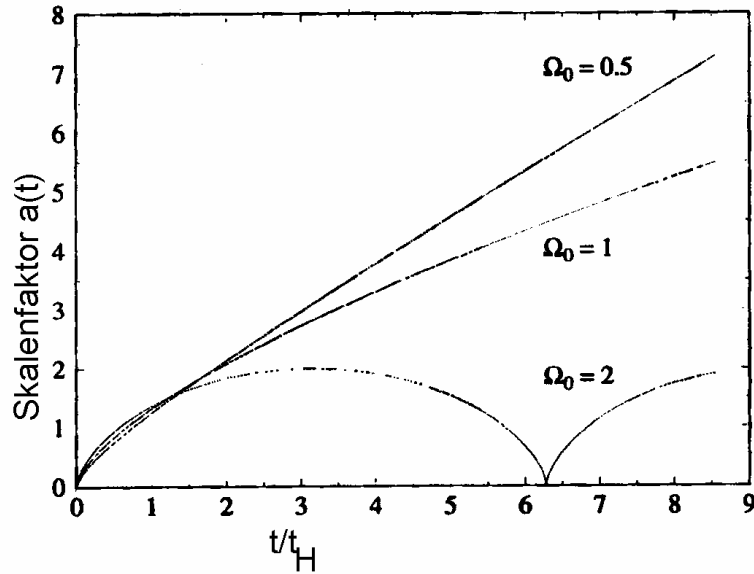


Fig. 2.3. Drei Lösungen der Friedmann-Gleichung für $\Omega_0 < 1$ mit negativer Raumkrümmung, $\Omega_0 = 1$ mit euklidischem Raum und $\Omega_0 > 1$ verbunden mit positiver Raumkrümmung..

Die Lösungen $\Omega_0 > 1$ beschreiben eine Expansion bis zu einem Maximum bei $t/t_H = \pi$, dem sich ein Kollaps mit einer Nullstelle des Skalenparameters bei dem Argument $t/t_H = 2\pi$ anschließt. Dieses Verhalten setzt sich periodisch fort.

2.4. Rotverschiebung, Alter und vergangene Zeit.

Wir können jetzt den Überlegungen, die zu Gl. 2.9 und 2.10 geführt haben, eine anschauliche Interpretation geben. Wenn die Wellenlänge der Spektrallinie einer fernen Galaxie λ mit der entsprechenden Laborwellenlänge λ_0 verglichen wird (z.B. für die Linien des Wasserstoffs H_β oder Ly_α), dann lässt sich das Verhältnis durch den Skalenparameter a bekanntlich wie folgt ausdrücken

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{1}{a} \quad (2.23)$$

Offensichtlich hat die Wellenlänge des Lichts seit der Emission um den Faktor $z + 1$ zugenommen, weil der Raum um eben diesen Faktor expandierte (s. Fig. 2.4). Der entsprechende Faktor z kann im Hubble Gesetz

$$z = \frac{H_0}{c} r \quad (2.24)$$

jetzt beliebig große Werte annehmen $z > 0$.

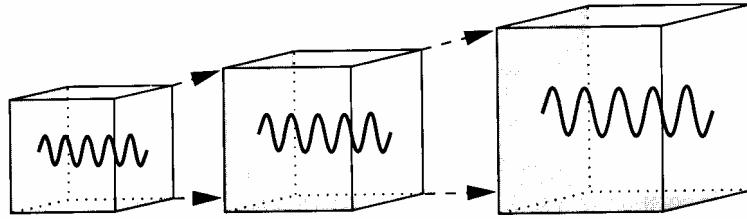


Fig. 2.4. Die Wellenlänge λ verhält sich wie eine räumliche Strecke und vergrößert sich im Laufe der kosmischen Entwicklung.

Der Zusammenhang kann dazu benutzt werden, um die Zeit, die seit dem Urknall bis zur Ausstrahlung des Lichts vergangen ist, aus der Rotverschiebung zu bestimmen. Für das kosmologische Modell $\Omega_0 = 1$ erhält man aus Gl. 2.20a

$$\frac{t(z)}{t_H} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \quad (2.25)$$

Häufig interessiert die Zeit, welche seit der Lichtemission vergangen ist, die „look-back-time“ t_L . Für $\Omega_0 = 1$ erhalten wir

$$t_L = t_0 - t(z) = \frac{2}{3} t_H \left[1 - \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right] \quad (2.26)$$

Die folgende Tabelle 2.1 gibt für verschiedene Rotverschiebungen eines Objekts das Alter $t(z)$ in Bruchteilen der Hubble-Zeit t_H .

Z	t/t_H nach Gl.2.26	t/t_H nach Gl. 5.14	t nach Gl. 5.14
0,5	0,350	0,604	$8,28 \cdot 10^9$ Jahre
1,0	0,233	0,412	$5,65 \cdot 10^9$ Jahre
2,0	0,126	0,231	$3,17 \cdot 10^9$ Jahre
3,0	0,083	0,151	$2,07 \cdot 10^9$ Jahre
5,0	0,045	0,089	$1,23 \cdot 10^9$ Jahre
7,0	0,029	0,054	$0,74 \cdot 10^9$ Jahre

Tabelle 2.1. Es wurden t/t_H nach Gl. 2.26 berechnet. In Kap. 5 wird eine realistischere Rechnung ausgeführt (Gl. 5.14), deren Ergebnisse in den beiden letzten Spalten angegeben sind.

Die Beobachtungen ergeben näherungsweise $t_H \approx t_0$ anstatt $t_0 = \frac{2}{3} t_H$ nach Gl. 2.26, was zu einem zu kleinen Weltalter von $9,1 \cdot 10^9$ Jahren führen würde. Der

Grund dafür ist das Vorhandensein einer „dunklen Energie“, die hier nicht berücksichtigt wurde und auf welche wir in Kap. 5 zurückkommen werden.

Als Beispiel betrachten wir jetzt ein Objekt mit der Rotverschiebung $z = 5$. Wir sehen das Objekt zu einer Zeit, als erst 9% der Hubble-Zeit t_H vergangen war. Das Beispiel einer stark „rot-verschobenen“ Galaxie mit $z = 2,9$ zeigen die Fig. 2.3 und 2.4. Für $t(z)$ erhält man in diesem Fall $t(z) = 0,16 \cdot t_H$.



Fig. 2.5.
Galaxie EIS 47 bei $z = 2,9$
nach einem Pressephoto der
ESO vom 27.02.99

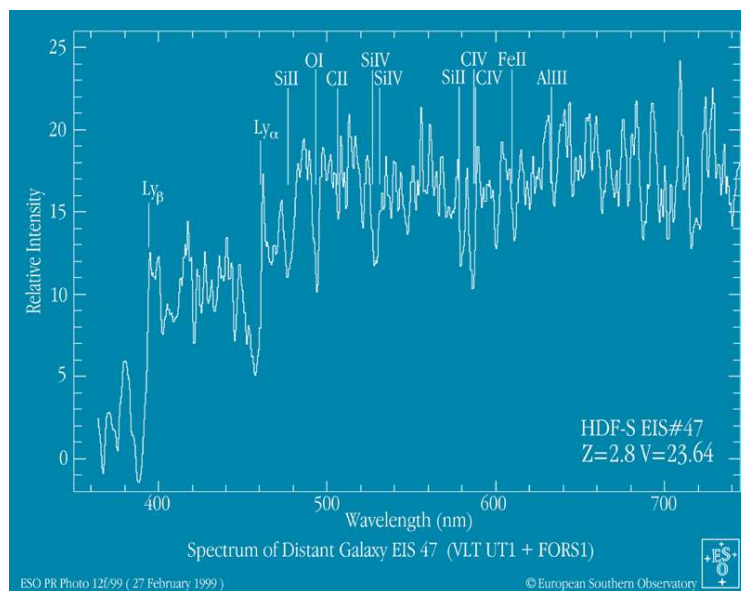


Fig. 2.6.Spektrum der Galaxie EIS 47. Man beachte die $Ly\alpha$ - und $Ly\beta$ -Linien des Wasserstoffs im sichtbaren Spektralbereich

In den letzten 30 Jahren hat sich die instrumentelle Ausrüstung die den Astronomen zur Verfügung steht, ständig verbessert. Dadurch konnten die

Grenzen der Sichtbarkeit wesentlich erweitert werden. Diese Entwicklung wird gut sichtbar, wenn man wie in Fig. 2.7. gesehen die maximal erreichte Rotverschiebung gegen die Jahreszahl aufträgt.

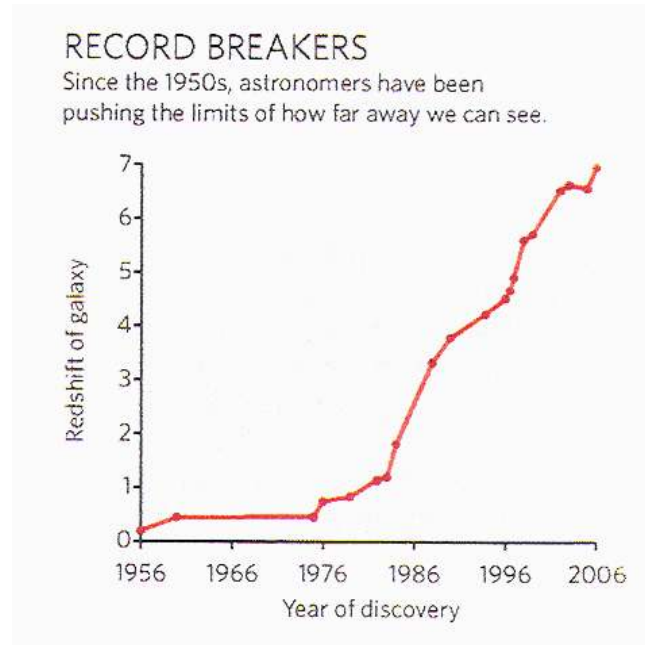


Fig. 2.7. Die beobachtete maximale Rotverschiebung gegen die Jahreszahl aufgetragen zeigt eindrucksvoll den Fortschritt in der instrumentellen Beobachtungstechnik (nach Jenny Hogan aus Nature Vol. 443/ 14.September 2006, p. 128) .

2.5. Literatur

Bradley W. Carroll Dale A. Ostlie: An Introduction to Modern Astrophysics
 Addison Wesley Comp. 1996. 84 US 2000 C319 (s. Ch. 27)

A. Weigert / H.J. Wendker: Astronomie und Astrophysik – Ein Grundkurs
 3. Aufl. VCH 1996. 84 US 1000 W419(3)

J.N. Islam: An introduction to mathematical cosmology
 Cambridge University Press 1991. 84 US 2000 I82

M. Berry: Principles of cosmology and gravitation. Cambridge Univ.
 Press 1976

2.6. Zusammenfassung

Es werden die Bewegungsgleichung des Skalenparameters mit Hilfe der Newtonschen Theorie abgeleitet. Man findet 2 Lösungsmengen, je nachdem die mittlere Massendichte kleiner oder größer als eine kritische Dichte ist. Ein Grenzfall stellt sich ein, wenn gerade die kritischer Massendichte erreicht wird. Zu dieser Lösung gehört eine ständige Expansion, die nach sehr langer Zeit zum Erliegen kommt. Nur dieser Fall ist mit einem euklidischen Raum verbunden. Der Skalenparameter ist umgekehrt proportional zur Rotverschiebung. Mit dieser einfachen Theorie, welche nur Materiedichte betrachtet, erhält man ein zu kleines Weltalter.