

### 3. Die Metrik eines homogenen und isotropen Kosmos.

#### 3.1. Hubble-Fluß und Gleichzeitigkeit

Für Newton blieb die Tatsache der Massenanziehung selbst ein Rätsel, wie er in einem Brief an seinen Freund Bentley erklärte: „That gravity should innate, inherent to matter, so that one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of anything else... is to me so great an absurdity that I believe no man who has in philosophical matter a competent faculty of thinking can ever fall into it.“ In Einsteins Theorie der Gravitation (bekannt unter dem Namen „Allgemeine Relativitätstheorie“) verursacht eine Verteilung von Materie oder eine Feldkonfiguration eine bestimmte Metrik der (3+1)-dimensionalen Raumzeit. Die Bahnen sind dann Geodäten (d.h. günstigste, oder extremale Kurven) in der Raumzeit. Kennt man die Metrik, weil sie durch Symmetrien oder einschränkende Annahmen bestimmt ist, so ist meist auch eine Lösung der Einsteinschen Gleichungen möglich. Die allgemeine Form des Linienelements ist

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.1)$$

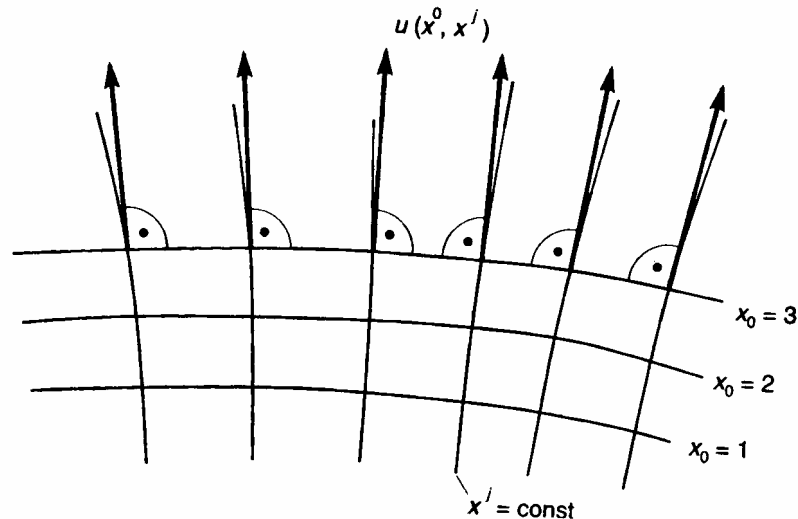
wobei  $x_0 \equiv ct$  ist. Wir werden im weiteren Verlauf der Vorlesung der Einsteinschen Konvention folgen und das Summenzeichen weglassen, wenn die Summe über gemeinsame Indizes läuft. In der speziellen Relativitätstheorie haben wir es mit der Metrik des Minkowski-Raums zu tun. Sie ist gegeben durch die Signatur

$$(g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}) = (1, -1, -1, -1) \quad (3.2)$$

Man geht in der Kosmologie davon aus, daß die Minkowski-Metrik überall lokal gilt (z.B. für einen Beobachter in irgend einer Galaxie, sofern er sich von Neutronensternen und schwarzen Löchern fernhält). Die Weltlinie eines solchen lokalen Systems ist eine zeitartige Geodäte  $x^j = \text{konstant}$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Man stellt sich nun vor, dass die verschiedenen überlappenden lokalen Systeme über die Expansion synchronisiert werden können. Das könnte z.B. so geschehen, daß eine bestimmte Energiedichte der Hintergrundstrahlung benutzt wird, bei welcher alle lokalen Uhren auf die gleiche kosmische Zeit gestellt werden ( wie später gezeigt wird, nimmt die Energiedichte der Hintergrundstrahlung wie  $\varepsilon(t) \propto a(t)^{-4}$  ab). Man erhält so 3-dimensionale Hyperflächen für jeweils konstante Werte von  $x_0 = ct$  (s. Fig. 3.1). Die Metrik ist durch das Linienelement

$$ds^2 = dx_0 dx^0 - h_{ij} dx^i dx^j \quad (3.3)$$

gegeben, wobei der 3-dim. metrische Tensor  $h_{ij}$  im allgemeinen einen gekrümmten 3-dim. Raum beschreibt und den euklidischen als Spezialfall enthält. Nach unseren früheren Überlegungen kann die Zeitabhängigkeit von  $h_{ij}$  durch einen Skalenfaktor beschrieben werden:  $a^2(t)h_{ij}$ .



**Fig. 3.1.** 3-dimensionale Hyperflächen  $u(x^0, x^j)$  gezeichnet für 3 verschiedene kosmische Zeiten. Die Hyperflächen beschreiben die Hubble-Strömung der kosmischen Materie. Die Flächennormalen  $u$  geben die Richtung der Weltlinien an.

### 3.2. Die Robertson-Walker-Metrik

Wir hatten in Kap. 2 und Anhang A2 argumentiert, dass dem Hubble-Gesetz ein homogener und isotroper Raum zugrunde liegen muss. Dieses Argument drehen wir jetzt um. Wir verlangen von einer kosmologisch sinnvollen Metrik, dass sie einen homogenen und isotropen Raum beschreibt (kosmologisches Prinzip). Er wird i. a. gekrümmt sein. In einem homogenen und isotropen Raum kann es aber nur einen Krümmungsparameter geben, mit welchem die 3-dim. Hyperfläche charakterisiert ist. Der Krümmungsparameter kann positives oder negatives Vorzeichen haben. Zur Veranschaulichung denken wir uns eine 2-dim. Fläche eingebettet in einen 3-dim. Raum. Die Fläche mit konstanter positiver Krümmung ist eine Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (3.4)$$

und  $R$  ist ihr Krümmungsradius. Entsprechend kann man einen Raum konstanter Krümmung als Einbettung einer 3-dimensionalen Hyperfläche  $S^3$  in einen 4-dimensionalen orthogonalen Raum  $R^4$  beschreiben. Es sei  $dl^2$  der Abstand zweier Punkte im  $R^4$  gegeben durch

$$dl^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k \quad (3.5)$$

Betrachten wir zuerst den Fall positiver Krümmung. Ein Raum konstanter positiver Krümmung lässt sich als 3-dimensionale Hyperfläche  $\mathbf{S}^3$  beschreiben. Zu ihm gehören, wie bei der Kugelfläche, alle Punkte, die vom Ursprung den gleichen Abstand  $R$  haben

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2 + w^2 \quad (3.6)$$

Wir können nun  $dw$  in Gl. 3.5 durch  $w^2 = R^2 - r^2$  eliminieren. Es ist dann

$$w^2 dw^2 = r^2 dr^2 \quad (3.7)$$

was eingesetzt in Gl. 3.5 ergibt

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} \quad (3.8)$$

oder in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad (3.9)$$

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.10)$$

was sich auch schreiben lässt

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.11)$$

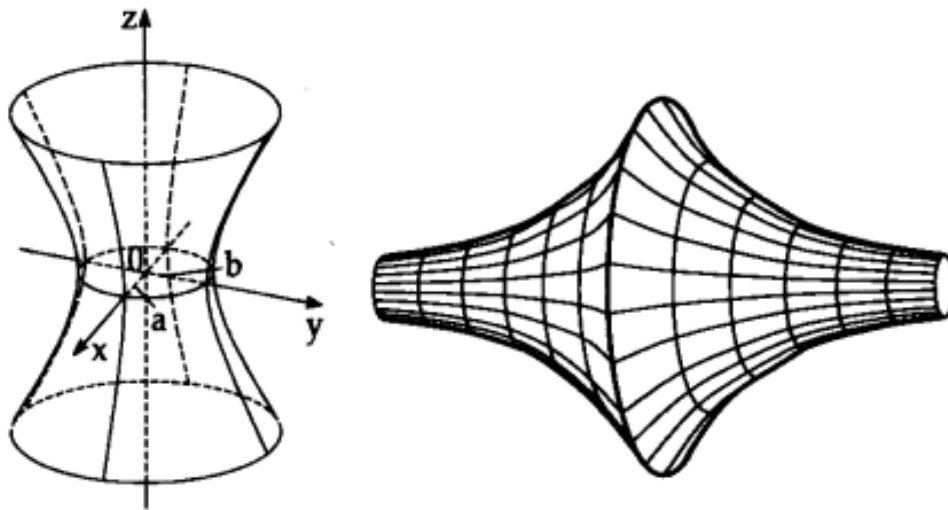
Dabei wurden die beiden Glieder mit  $dr^2$  zusammengefasst, danach wurden Zähler und Nenner durch  $R^2$  dividiert. Durch Hinzufügen der Zeitkoordinaten erhalten wir schließlich

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.12)$$

Wir können in analoger Weise mit einem Raum konstanter negativer Krümmung verfahren, indem wir ihn als eine negativ gekrümmte 3-dimensionale Hyperfläche  $\mathbf{H}^3$  eingebettet in einem 4-dimensionalen euklidischen Raum beschreiben

$$-R^2 = -w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.13)$$

Im 3-dimensionalen Raum existiert kein isotroper Körper mit konstant gekrümmter Oberfläche. Bei negativ gekrümmten 2d-Oberflächen im 3-dim. Raum liegt der Krümmungsmittelpunkt außerhalb (in Fig. 3.2 vor der Fläche), bei positiver Krümmung innerhalb des Körpers hinter dessen Oberfläche.



**Fig. 3.2.** Veranschaulichung negativer Krümmung  $K = -R^{-2}$  an zwei 2d-Oberflächen im  $R^{(3)}$ . Links: ein einschaliges Hyperboloid. Rechts: die Pseudosphäre.

Wir erhalten wir aus Gl. 3.13

$$-R^2 = -w^2 + r^2 \quad (3.14)$$

und analog zu Gl. 3.8

$$dw^2 = \frac{r^2 dr^2}{w^2} = \frac{r^2 dr^2}{r^2 + R^2} \quad (3.15)$$

aber mit den Linienelementen

$$dl^2 = dr^2 - dw^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.16)$$

Man beachte, dass im Nenner des Glieds mit  $dr^2$  jetzt ein Pluszeichen steht. Die Zeitabhängigkeit der räumlichen Komponente von Gl. 3.12 und 3.16 lässt sich wegen der Isotropie der Metrik durch einen Skalenfaktor  $a(t)$  ausdrücken

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \cdot dl^2 \quad (3.17)$$

und

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 \pm Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \quad (3.17a)$$

mit der Krümmung

$$K = 1/R^2 \quad (3.18)$$

Die Metrik Gl. 3.17 wurde zuerst in den dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts von H.P. Robertson und A.G. Walker unabhängig voneinander für einen isotropen und homogenen Raum angegeben. Zu Ehren der Autoren heißt sie deshalb Robertson-Walker-Metrik. Man findet in der Literatur häufig noch eine etwas abgeänderte Form der Gl. 3.17. Dazu setzt man  $r/R = r'$  und  $a(t) \cdot R = R(t)$ . Gl. 3.17 erhält man dann in der Form, wie wir sie auch in Kap. 4 benutzen wollen

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr'^2}{1 - \kappa r'^2} + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi) \right] \quad (3.17b)$$

in welchen  $\kappa$  die Werte  $\kappa = +1, 0, -1$  bei positiver, verschwindender oder negativer Krümmung annehmen kann.

Die Robertson-Walker-Metrik kann auch noch in einer anderen Form angegeben werden

$$dl^2 = d\chi^2 - f^2(\chi) \cdot d\Omega^2 \quad (3.19)$$

Für positive, verschwindende oder negative Krümmung erhält man für

$$f_\kappa(\chi) = \begin{cases} K^{-1/2} \sin K^{1/2} \chi & \text{für } \kappa = +1 \\ \chi & \text{für } \kappa = 0 \\ K^{-1/2} \sinh K^{1/2} \chi & \text{für } \kappa = -1 \end{cases} \quad (3.20)$$

Unter den Bedingungen räumlicher Homogenität und Isotropie ist Gl. 3.19 mit 3.20 die allgemeinste Form, die ein räumliches Linienelement annehmen kann. Um zu zeigen, wie Gl. 3.20 aus 3.17 folgt, setzen wir für  $\kappa = +1$

$$\chi = K^{-1/2} \arcsin K^{1/2} r \quad (3.21)$$

Dann wird für  $\kappa = +1$

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} \quad \text{und} \quad r = f_{\kappa}(\chi) = K^{-1/2} \sin K^{1/2} \chi .$$

Wir stellen das Ergebnis für alle 3 Fälle  $\kappa = +1, 0, -1$  noch einmal zusammen, wobei  $f^{-1}_{\kappa}(r)$  die zu  $f_{\kappa}(\chi)$  inverse Funktion bedeutet und  $K^{1/2} = 1/R$

$$\chi = f^{-1}_{\kappa}(r) = K^{-1/2} \arcsin K^{1/2} r = R \left[ \frac{r}{R} - \frac{1}{6} \frac{r^3}{R^3} + \dots \right] \quad \text{für } \kappa = +1$$

$$\chi = f^{-1}_{\kappa}(\chi) = r \quad \text{für } \kappa = 0 \quad (3.22)$$

$$\chi = f^{-1}_{\kappa}(r) = K^{-1/2} \operatorname{arcsinh} K^{1/2} r = R \left[ \frac{r}{R} + \frac{1}{6} \frac{r^3}{R^3} + \dots \right] \quad \text{für } \kappa = -1$$

Denkbar wäre eine Welt, in welcher unsere Galaxie ein geschlossenes System bildet, eine Überlegung, die schon Karl Schwarzschild anstellte. Dazu ist die mittlere Dichte allerdings viel zu gering. Eine solche in sich geschlossene Welt würde, von außen betrachtet, wie ein großes schwarzes Loch wirken mit einem Ereignishorizont, in welchen Licht und Materie nur von außen nach innen dringen kann. In Kap. 2 haben wir gesehen (s. Fig. 2.3), dass ein solcher „Kosmos“ nach einer gewissen Zeit,  $t = 2\pi t_0$ , wieder in sich zusammenfällt (big crunch). Seine Bewohner würden nach dieser Zeit unweigerlich das Schicksal der Raumfahrer in einem schwarzen Loch erleiden, d. h. durch Gezeitenkräfte zerrissen und auf unvorstellbare Dichten zusammen gedrückt werden.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass wir uns hier ausschließlich mit der globalen Metrik des Raums beschäftigt haben. Daneben gibt es viele lokale Abweichungen, welche durch Ablenkungen des Lichts zu Gravitationslinsen-Effekten führen (s. Fig. 3.3)



**Fig. 3.3. Bild des Quasars Q2237 +0305, der durch eine Galaxie im Vordergrund in Form eines Kleeblatts abgebildet wird (Credit and Copyright J. Rhoads s.a. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0207117>)**

### 3.3. Abstände in der Robertson-Walker-Metrik

Wir hatten in Kap.1 schon darauf hingewiesen, dass es nicht möglich ist, eine Momentaufnahme von unserer kosmischen Umgebung zu machen. Nicht nur ist das Licht ferner Galaxien, einige hundert Millionen oder Milliarden Jahre unterwegs, der Kosmos dehnt sich auch inzwischen weiter aus. Deshalb müssen wir bei der Definition von Abständen einige Sorgfalt aufwenden und beachten, dass es je nach Beobachtungsbedingungen verschiedene Abstandsbegriffe gibt. Wenden wir uns zunächst dem Koordinatenabstand  $d\chi$  zu. Er bleibt während der Hubble-Expansion konstant, weswegen er auch mitbewegter Abstand, englisch „comoving distance“, genannt wird. Er hängt jedoch, wie man sich geometrisch leicht überlegt, vom Krümmungsradius der Geometrie ab (s. Gl. 3.22)

$$D_c = \int_0^1 d\chi = f_K(r_1) \quad (3.23)$$

wobei  $f_K(r_1)$  für  $K^{1/2} r_1 < 1$  die Werte von Gl. 3.22 annimmt. Wir können den mitbewegten Abstand auch durch den Lichtweg ( $ds^2 = 0$ ) darstellen. Dann ist

$$d\chi = \frac{c \cdot dt}{a(t)} = \frac{c \cdot da}{a^2(t)H(t)} \quad (3.24)$$

wobei wir rechts  $dt$  durch die Hubble-Funktion  $\dot{a}/a = H(t)$  ersetzen. Man kann  $H(t)$  zerlegen in einen zeitabhängigen Faktor  $E(t)$  und die Konstante  $H_0$

$$H(t) = H_0 E(t) \quad (3.25)$$

Wird nur die normierte Massendichte  $\Omega_{0M} a^{-3}$  und Energiedichte  $\Omega_\Lambda$  (s. Kap. 5) in einem euklidischen Raum berücksichtigt, ist

$$H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_{0M} a^{-3} + \Omega_\Lambda} \quad (3.26)$$

Die Zeitkoordinate  $t$  kann nicht direkt gemessen werden, dagegen ist die Rotverschiebung  $z$  zugänglich. Deshalb ersetzen wir  $1/a = (z + 1)$

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{0M} (z + 1)^3 + \Omega_\Lambda} \quad (3.27)$$

Wir definieren noch die Hubble-Entfernung

$$c/H_0 = D_H = 3,0/h \text{ Gpc} \quad (3.28)$$

Im Falle euklidischer Geometrie wird dann der Abstand zu einem Ereignis der Rotverschiebung  $z$

$$D_C = \chi(z) = r(z) = D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (3.29)$$

Als Nächstes wollen wir den Eigenabstand (proper distance) definieren, wobei die Raumpunkte, welche den Abstand  $D_P$  definieren, gleichzeitig gemessen werden müssen, d.h.  $dt = 0$ . Wir erhalten aus  $\sqrt{-ds^2} = a(t) \cdot d\chi$  für  $D_P$

$$D_P = a(t) \int_0^1 d\chi = a(t) \cdot D_C = D_H \int_0^1 \frac{dz'}{(z + 1)E(z')} \quad (3.30)$$

### 3.4. Horizonte

Selbst wenn der Kosmos unendlich ausgedehnt wäre (was wir nicht wissen), könnten wir nur den Teil beobachten, von welchem uns noch Lichtsignale erreichen. In diesem Sinne definiert man den Teilchenhorizont als den



geometrischen Ort aller Ereignisse, von welchem Lichtsignale beim Beobachter gerade noch eingetroffen sein können. Wenn die Lichtsignale zur Zeit  $t_1 = 0$  emittiert wurden und zur Zeit  $t_2 = t$  bei  $r = r_H$  detektiert werden, haben sie folgenden Weg zurückgelegt

$$r_H = c \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (3.31)$$

Nach Gl. 2.19 ist im Materie dominierten Kosmos mit  $\kappa = 0$  finden wir  $a(t) = C \cdot t^{2/3}$ . Dann nimmt das Integral Gl. 3.31 folgenden Wert an

$$r_H = \frac{3c}{C} t^{1/3} \quad (3.32)$$

Daraus berechnen wir den Eigenabstand des Teilchenhorizonts  $d_H$

$$d_H = a(t)r_H = 3ct \quad (3.33)$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Proportionalitätskonstanten  $C$ , die bei der Berechnung von  $d_H$  herausfällt. Es ist  $t = t_0$  die Zeit, welche seit dem Beginn des Kosmos vergangen ist. Nach jüngsten Beobachtungsergebnissen ist

$$t_0 \cong H_0^{-1}$$

Damit wird dann

$$d_H \cong 3cH_0^{-1} = 41.1 \cdot 10^9 \text{ Lj} = 12600 \text{ Mpc}$$

Im Strahlungs-dominierten Kosmos ist wegen  $a(t) \propto t^{1/2}$

$$d_H = 2ct \quad (3.34)$$

Um Verwechslungen vorzubeugen, definieren wir noch den Ereignishorizont. Er ist der geometrische Ort aller Ereignisse, von welchen ein Lichtsignal eine unendliche Zeit benötigt, um zum Beobachter zu gelangen

$$r_{EH} = \int_t^\infty \frac{cdt'}{a(t')} \quad (3.35)$$

Sowohl für den Strahlungskosmos wie auch für den Materiekosmos divergiert das Integral, d.h. alle Signale erreichen noch in endlicher Zeit den Beobachter. Wenn die Dunkle Energie, wie wir später sehen werden, den überwiegenden Anteil zur Dichte beiträgt, dann gilt

$$\left[\frac{\dot{a}}{a}\right]^2 = H_0^2 \Omega_\Lambda$$

was integriert ergibt

$$a = a(t_0) \exp H_0 \Omega_\Lambda^{1/2} t$$

Aus Gl. 3.31 erhält man dann

$$r_H = \frac{c}{H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}} = \frac{D_H}{\Omega_\Lambda^{1/2}}$$

wobei  $D_H$  die Hubble-Länge ist.

### 3.5. Konforme Zeit

Die konforme Zeit (conformal time) wird in der Kosmologie häufig benutzt

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \quad (3.36)$$

Wie man aus Gl. 3.24 sieht, hängt  $\tau$  mit dem Lichtweg bzw. der mitbewegten Koordinaten zusammen

$$r = c \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = c \cdot \tau \quad (3.37)$$

Im Allgemeinen ist  $\tau$  nur bis auf eine Konstante bestimmt. Mit der Einführung von  $d\tau$  lässt sich die Robertson-Walker-Metrik für  $\kappa = 0$  besonders einfach schreiben

$$ds^2 = a^2(t) \cdot [c^2 d\tau^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (3.38)$$

wobei meist noch  $c = 1$  gesetzt wird.

### 3.6. Literatur

M. Berry : Principles of cosmology and gravitation. Cambridge Univ. Press 1977.

H. Gönner : Einführung in die Kosmologie. Spektrum Akademischer Verlag  
1994

J.A. Peacock : Cosmological Physics. Cambridge Univ. Press 1999

M. Bartelmann, P. Schneider: Weak Gravitational Lensing. .  
<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9912108>

D.W. Hogg: Distance measures in Cosmology. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9905116>

Sean M. Carroll: Lecture Notes on General Relativity.  
[http://arxiv.org/PS\\_cache/gr-qc/pdf/9712/9712019.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/gr-qc/pdf/9712/9712019.pdf)

### **3.7. Zusammenfassung**

Ausgehend von anschaulichen d-Flächen mit positiver und negativer Krümmung werden 3d-Flächen untersucht, die in einem 4d-Raum eingebettet. s interessieren hier nur solche mit homogener positiver oder negativer Krümmung. Aus ihnen wird eine Metrik, die Robertson-Walker-Metrik abgeleitet, welche einen homogenen und isotropen Raum mit positiver, negativer oder verschwindender Krümmung beschreibt. Die Entfernung lässt sich dann als mitbewegter Abstand auf dem Lichtkegel oder als Eigenabstand definieren.