

## 4. Einsteins Gleichungen und das Standardmodell der Kosmologie

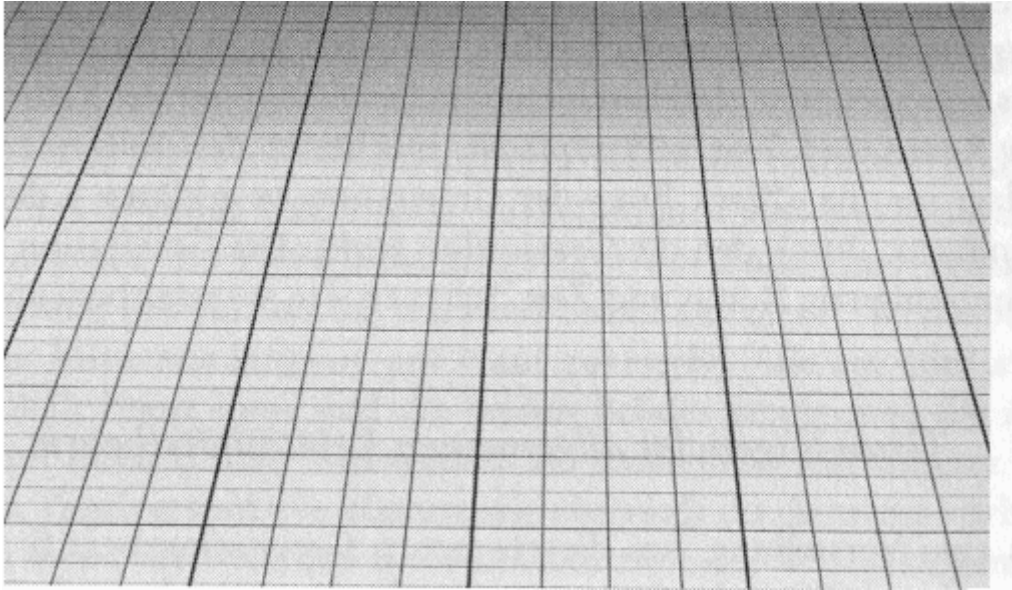
### 4.1. Die Einsteinschen Gleichungen (EG) in Robertson-Walker-Metrik

Die „Allgemeine Relativitätstheorie“ (ART) geht von der Gleichheit träger und schwerer Masse aus, die experimentell sehr gut bestätigt ist. Eine praktische Folge davon: alle Massen fallen gleich schnell. Das gilt z.B. auch für Passagiere und Gegenstände in einer Raumkapsel. Geringe Abweichungen davon werden als Gezeitenkräfte wirksam. Unter dieser Voraussetzung läßt sich ein Inertialsystem durch ein frei fallendes System (z.B. eine Raumkapsel) ersetzen. Da im Raum Massen i. a. ungleichförmig verteilt sind (z.B. Sterne, Sternhaufen, Galaxien), wird ein frei fallendes System eine gekrümmte Bahn beschreiben. Nach Newton würde man die Bahn aus den Gravitationskräften der umgebenden Massen bestimmen. In der ART dagegen bestimmen die Massen die Geometrie des Raumes. Das frei fallende System bewegt sich in dieser Geometrie auf extremalen Bahnen, den Geodäten (s. Geodätengleichung A.5). Man kann sich eine gewisse Veranschaulichung dieser ungewohnten Vorstellung verschaffen, indem man gekrümmte Flächen in einem 3-dimensionalen Raum betrachtet. Wir denken dabei an eine gespannte ebene Gummimembran, die eine euklidische Ebene veranschaulichen soll (s. Fig. 4.1a). Eine Styroporkugel als Probemasse, die man angestoßen hat, beschreibt auf der Membran eine geradlinige Bahn. Legt man eine Stahlkugel als Modell eines Gravitationszentrums auf die Membran, so entsteht eine trichterförmige Vertiefung. Die Fläche ist jetzt gekrümmt und die Bahn der Probemasse eine geschlossene oder offene Kurve, je nach ihrer Anfangsgeschwindigkeit. Die Bahn wird im Modellversuch durch die Verformung der Gummimembran bestimmt. Die Verallgemeinerung des Modells führt auf einen gekrümmten Raum. Seine lokalen Eigenschaften können mit Hilfe der Riemannschen Geometrie beschrieben werden.

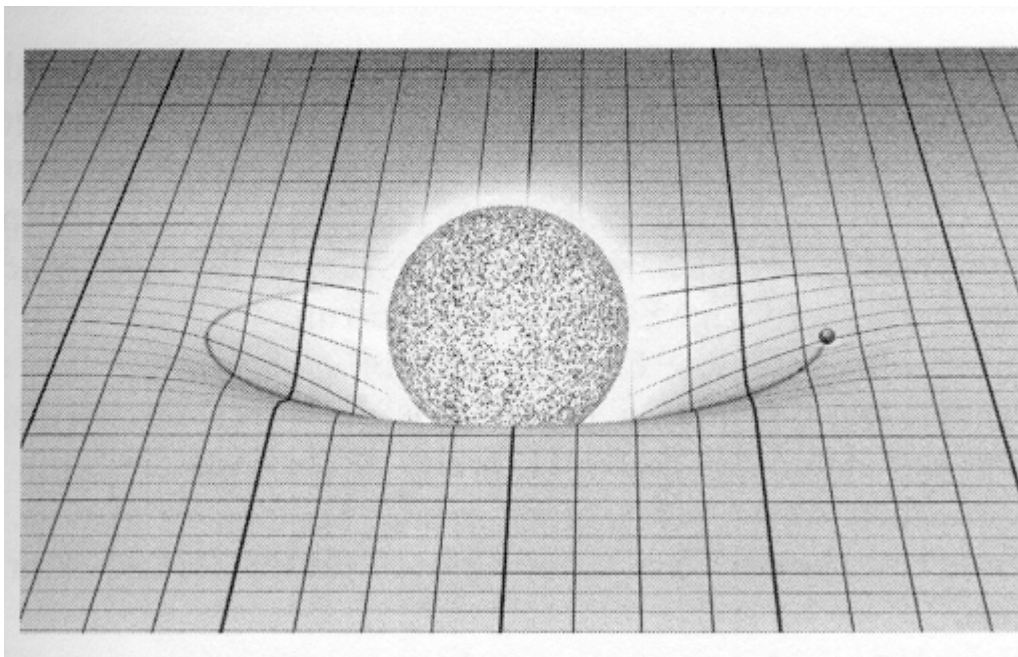
Wir haben im vorigen Kapitel bereits gesehen, dass sich gekrümmte Räume als 3-dimensionale Hyperflächen beschreiben lassen, die in einen 4-dim. euklidischen Raum eingebettet sind. Diese Beschreibung war allerdings redundant. Wir konnten die 4. Raumdimension  $w$  wieder eliminieren. Statt der Bogenlänge im euklidischen Raum

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.1)$$

erhielten wir in der Robertson-Walker-Metrik Gl. 3.20



**Fig. 1.a. Euklidischer Raum als ebene Fläche veranschaulicht.**



**Fig. 1.b. Krümmung der Fläche durch Anwesenheit einer Masse hier im Modell.**

$$dl^2 = R(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (4.2)$$

wobei wir hier zur bequemeren Schreibweise

$$R \cdot a(t) = R(t) \quad (4.2a)$$

gesetzt haben. Während  $R^2$  die Geometrie nicht ändert, bewirkt der Vorfaktor von  $dr^2$  je nach Vorzeichen von  $\kappa$  eine Verlängerung oder Verkürzung in radialer Richtung.

Die Einsteinschen Gleichungen (EG) verknüpfen diese Geometrie mit der Massenverteilung, indem sie eine Beziehung zwischen 2-stufigen Tensoren herstellen

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \hat{R} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot \hat{T}_{\mu\nu} \quad (4.3)$$

Die linke Seite  $\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \hat{R} = \hat{G}_{\mu\nu}$  heißt auch Einstein-Tensor. Sie enthält den Ricci-Tensor  $\hat{R}_{\mu\nu}$ , den metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$  und den Ricci-Skalar

$$\hat{R} = g^{\mu\nu} \hat{R}_{\mu\nu}. \quad (4.4)$$

Wir folgen hier der Einstein-Konvention und lassen in Summationen die Summenzeichen über gleiche Indizes weg. Der Einstein-Tensor  $G_{\mu\nu}$  beschreibt die lokale Geometrie der Raum-Zeit. Die rechte Seite enthält dagegen die Information über das physikalische System.  $\hat{T}_{\mu\nu}$  ist der (aus der Elektrodynamik bekannte) Energie-Impulstensor, der das physikalische Feld durch seine lokale Energiedichte, lokalen Druck und Spannungen beschreibt.

Der Ricci-Tensor  $\hat{R}_{\mu\nu}$  ist ein 2-stufiger, symmetrischer Tensor. Er lässt sich aus den Konnektionen  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  (auch Christoffelsymbole genannt) und ihren Ableitungen berechnen

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \quad (4.5)$$

Die Konnektionen  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$  enthalten Produkte der Komponenten des metrischen Tensors  $g_{\nu\lambda}$  und seiner Ableitungen  $g_{\sigma\nu,\lambda}$ , sind also letztlich aus dem metrischen Tensor zu gewinnen

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \quad (4.6)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass es sich um einen torsionsfreien Raum handelt, was in der Kosmologie gewährleistet ist. Es gilt dann die Symmetriebeziehung

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} \quad (4.6a)$$

Die  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$  sind selbst keine Tensoren!

Die gewöhnliche Ableitung nach einer (kontravarianten) Koordinaten  $x^{\nu}$  wird durch ein Komma bezeichnet, z.B.

$$\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = A_{\mu,\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\nu}} = g_{\sigma\lambda,\nu} \quad (4.7)$$

Die ko- und kontravariante Form des metrischen Tensors sind miteinander über das Kronecker-Symbol verknüpft

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda} \quad (4.8)$$

Für die Komponenten der auf Diagonalform gilt

$$g_{\mu\mu} g^{\lambda\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda} \quad (4.9)$$

## 4.2. Die Berechnung des Ricci- und des Energie-Impuls-Tensors.

Um die EG (4.3) auszuwerten, schreiben wir zunächst die  $g_{\mu\nu}$  in Polarkoordinaten und definieren

$$(dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, dr, d\theta, d\phi) \quad \text{und} \quad (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) = (cdt, -dr, -d\theta, -d\phi).$$

Dann wird

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -R^2 / (1 - \kappa r^2), \quad g_{22} = -r^2 R^2, \quad g_{33} = -\sin^2 \theta R^2 r^2 \quad (4.10)$$

Nach Gl. 4.8 sind die Komponenten der kontravarianten Form die reziproken Werte von Gl. 4.9, also  $g^{11} = -(1 - \kappa r^2) / R^2$  etc. Damit können die

Konnektionen berechnet werden. Die von Null verschiedenen Komponenten lauten wie folgt

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= c^{-1} \dot{R}R / (1 - \kappa r^2), & \Gamma_{22}^0 &= c^{-1} r^2 R \dot{R}, & \Gamma_{33}^0 &= c^{-1} r^2 \sin^2 \theta R \dot{R}, \\
\Gamma_{01}^1 &= c^{-1} \dot{R} / R, & \Gamma_{11}^1 &= \kappa r / (1 - \kappa r^2), & \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - \kappa r^2), \\
\Gamma_{33}^1 &= -r(1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{02}^2 &= c^{-1} \dot{R} / R, & \Gamma_{12}^2 &= 1/r, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma_{03}^3 &= c^{-1} \dot{R} / R, & \Gamma_{13}^3 &= 1/r, & \Gamma_{23}^3 &= ctg \theta
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dazu kommen noch alle  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , die durch Vertauschung der unteren beiden Indizes nach Gl. 4.6a aus den angegebenen Komponenten hervorgehen. Gl. 4.11 eingesetzt in Gl. 4.4 ergibt die 4 Diagonalglieder des Ricci-Tensors

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{00} &= -3\ddot{R} / c^2 R, & \hat{R}_{11} &= \frac{1}{c^2} (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2 \kappa) / (1 - \kappa r^2), \\
\hat{R}_{22} &= \frac{r^2}{c^2} (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2 \kappa), & \hat{R}_{33} &= \frac{r^2}{c^2} \sin^2 \theta (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2 \kappa)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Nun müssen wir noch nach Gl. 4.4 den Ricci-Skalar berechnen, wozu wir die reziproken Werte von  $g_{\mu\nu}$  aus Gl. 4.10 und Gl. 4.9 benutzen

$$g^{\lambda\lambda} = \frac{1}{g_{\lambda\lambda}} \tag{4.9a}$$

Wir erhalten

$$g^{00} = 1, \quad g^{11} = -(1 - \kappa r^2) / R^2, \quad g^{22} = -1 / r^2 R^2, \quad g^{33} = -1 / \sin^2 \theta R^2 r^2 \tag{4.10a}$$

Der Ricci-Skalar wird dann

$$\hat{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6(R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2 \kappa) / c^2 R^2 \tag{4.13}$$

Wir wenden uns jetzt der rechten Seite der EG zu. Die kosmische Materie betrachten wir hier als klassische Flüssigkeit. Im Ruhesystem (oder im mit der Flüssigkeit mitbewegten System, was gleichbedeutend ist) hat der Energie-Impuls-Tensor die Form

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Hier bedeutet

$$\varepsilon = \rho c^2 \quad (4.15)$$

die Masse/Energie-Dichte. In einem beliebigen Inertialsystem erhalten wir

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (4.16)$$

Entsprechend gilt für die kontravariante Form

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (\varepsilon + p) \cdot u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (4.17)$$

Für das momentane Ruhssystem ist die 4-Geschwindigkeit

$$u^\mu = \gamma(c, 0, 0, 0) \quad (4.18)$$

Es trägt also nur  $u_0 u_0 = c^2$  bei. Damit erhalten wir in der Robertson-Walker-Metrik unter Berücksichtigung von Gl. 4.9 und 4.10

$$T_{00} = \varepsilon, \quad T_{11} = p R^2 / (1 - \kappa r^2), \quad T_{22} = p r^2 R^2, \quad T_{33} = p r^2 \sin^2 \theta R^2 \quad (4.19)$$

Wir berechnen die 00-Komponente auf der linken Seite der EG

$$\hat{R}_{00} - \frac{1}{2} g_{00} \hat{R} = -3\ddot{R}/c^2 R + 3(R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2 \kappa) / c^2 R^2 \quad (4.20)$$

und auf der rechten Seite

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon \quad (4.21)$$

Das ergibt

$$\frac{3}{R^2} (\dot{R}^2 + c^2 \kappa) = \frac{8\pi G}{c^2} \varepsilon \quad (4.22)$$

In entsprechender Weise erhält man eine Gleichung der 11-Komponenten

$$-(2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2\kappa) = \frac{8\pi G}{c^2} p R^2 \quad (4.23)$$

Die 22- und 33-Komponenten ergeben äquivalente Gleichungen, sodaß wir auf die Auswertung verzichten können.

### 4.3. Erhaltungssätze.

Die kovariante Divergenz verschwindet für den Energie-Impuls-Tensor

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 = T_{;\nu}^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} T^{\sigma\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} T^{\mu\sigma} \quad (4.24)$$

was der Erhaltung der Massenenergie und des Impulses entspricht. Das Entsprechende gilt auch für den Einstein-Tensor, was in Gl. A.6.4 des Anhangs gezeigt wird. Die Auswertung von Gl. 4.24 ergibt nach Anhang A.8

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\varepsilon + p) = 0 \quad (4.25)$$

### 4.4. Die Friedmann-Gleichungen.

Wir eliminieren zunächst  $\dot{R}^2 + c^2\kappa$  mit Hilfe von Gl. 4.22 aus 4.23 mit dem Ergebnis

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p) \quad (4.26)$$

Damit erhalten wir eine Aussage über die Krümmung des Verlaufs des Skalenparameters  $a(t)$ . Neu ist hier, dass auch der Druck  $p$  auftritt, der ebenso wie  $\varepsilon$  zur Gravitation beiträgt. Im Allgemeinen ist  $p \ll \varepsilon$ . Bei einem ultrarelativistischen Gas (heißes Plasma im frühen Universum) kann allerdings  $p \approx \varepsilon$  sein.

Als nächstes schreiben wir Gl. 4.22 in folgender Form

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{c^2}{R^2}\kappa \quad (4.27)$$

Das ist die erste Friedmanngleichung, wie wir sie bereits in Kap. 2 in Newtonscher Näherung abgeleitet haben, wobei wir nach Gl. 4.2a auch

$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$  setzen können. Für  $t = t_0$  ist die Hubble-Konstante

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 - \frac{c^2}{R^2} \kappa \quad (4.28)$$

Der Faktor  $\kappa/R^2$  bestimmt wieder die Krümmung, die im euklidischen Fall, also bei kritischer Dichte verschwindet. In allen anderen Fällen hängt die Krümmung von der Dichte ab. Diesen Zusammenhang kann ausschließlich die ART liefern. Mit Gl. 4.26 liefert sie unabhängig davon auch einen Ausdruck für die Beschleunigung. Wenn  $z < 1$  ist, kann man den Skalenfaktor um  $t_0$  nach negativen Zeiten (d.h. in die Vergangenheit) zu entwickeln

$$\begin{aligned} (z+1)^{-1} = a(t) &= a(t_0) - (t_0 - t)\dot{a}(t_0) + \frac{1}{2}(t_0 - t)^2 \ddot{a}(t_0) - \dots - \\ &= 1 - (t_0 - t)H_0 - \frac{1}{2}(t - t_0)^2 q_0 H_0^2 - \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

Der Parameter  $q_0$  misst die Beschleunigung oder Abbremsung. Er ist wie folgt definiert

$$q_0 = -\frac{\ddot{a} a^2}{a \dot{a}^2} \Big|_{t=t_0} = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \cdot \frac{1}{H_0^2} \quad (4.30)$$

und kann direkt mit Gl. 4.26 in Verbindung gebracht werden. Mit den heutigen Beobachtungsmethoden werden häufig Objekte bei  $1 < z < 7$  untersucht, sodass sich die Entwicklung Gl. 4.29 erübrigt.

## 4.5. Zustandsgleichungen.

Wir haben bisher Gl. 4.25 noch nicht benutzt. Dazu wäre es nötig, eine Zustandsgleichung  $p = f(\rho)$  für die kosmische Materie zu haben. Im Falle baryonischer Materie ist  $p \ll \rho c^2$ , d.h. wir können den Druck gegenüber der Dichte vernachlässigen. Aus Gl. 4.25 wird dann

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -3 \frac{\dot{R}}{R} \quad (4.31)$$



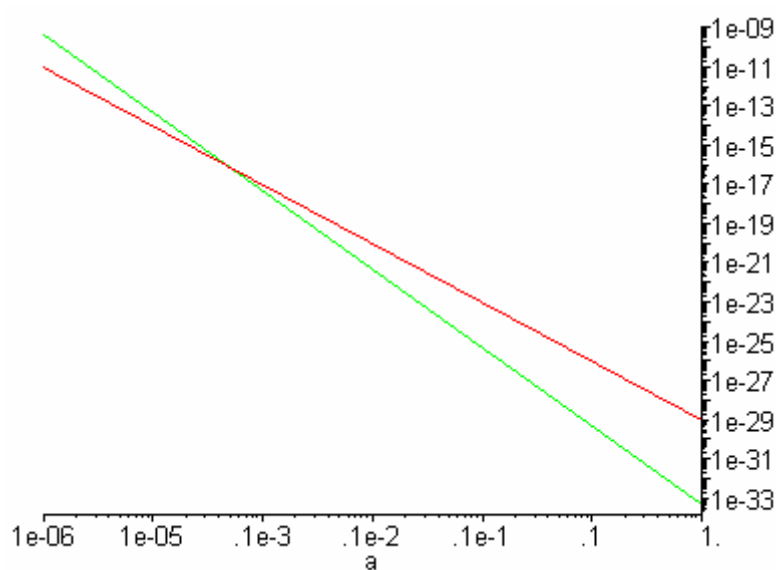
was integriert

$$\varepsilon \propto R^{-3} \propto a(t)^{-3} \quad (4.32)$$

ergibt, ein triviales Ergebnis, das wir in Kap. 2.3 bei der Annahme der Massenerhaltung schon verwendet haben. Man erhält wieder Gl. 2.19

$$a(t) = (6\pi G \cdot \varepsilon_{c,0})^{1/3} t^{2/3}$$

wobei  $\varepsilon_{c,0}$  die in der Gegenwart gemessene kritische Energie/Materie-Dichte ist.



**Fig. 4.2.** Materiedichte ( $0,94 \cdot 10^{-29} / a^3$ ) und Strahlungsdichte ( $0,47 \cdot 10^{-33} / a^4$ ) aufgetragen als Funktion des Skalenparameters  $a$ . In der Gegenwart ist  $a = a_0 = 1$ .

Die beiden Dichten werden bei  $a \approx 5 \cdot 10^{-5}$  gleich. Unter Materiedichte ist hier die kritische Dichte verstanden. Die reale kosmische Dichte enthält 70% dunkle Energie, 26% dunkle Materie und nur 4% von der uns vertrauten baryonischen Materie.

Handelt es sich um masselose Teilchen (z.B. Photonen oder Neutrinos, die im frühen Universum dominierten), dann gilt

$$p \propto \frac{1}{3} \varepsilon \quad (4.33)$$

was eingesetzt in Gl. 4.25

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -4 \frac{\dot{R}}{R} \quad (4.34)$$

und damit

$$\varepsilon \propto R^{-4} \propto a(t)^{-4} \quad (4.35)$$

ergibt.

Bei allen Lösungen der Friedmann-Gleichungen (für  $\kappa = \pm 1, 0$ ) verschwindet der Skalenparameter  $a$  bei  $t = 0$ , also  $a(t = 0) = 0$ . Das bedeutet, dass die Materiedichte  $\varepsilon_M = \rho_M c^2 \propto a^{-3}$  oder die Strahlungsdichte  $\varepsilon_M \propto a^{-4}$  bei  $t = 0$  Setzt man Gl. 4.35 in Gl. 4.27 ein und setzt  $\kappa = 0$ , so erhält man für die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors

$$a(t) \propto t^{1/2} \quad (4.36)$$

Den Proportionalitätsfaktor werden wir später bei der Behandlung der Hintergrundstrahlung bestimmen. divergiert (s.a. Fig. 4.2). Ist die Singularität des Anfangs in den Modellen vermeidbar? Diese Frage wird uns noch weiter unten beschäftigen.

#### 4.6. Schlußbemerkungen

Die Friedmanngleichungen scheinen eine globale Aussage über den Kosmos (mit Skalenparameter und Krümmungsradius) zu machen. Das erscheint zunächst als ein Widerspruch zur ART, die immer nur lokale Aussagen zuläßt. Der Widerspruch löst sich, wenn man bedenkt, daß wir bei den hier besprochenen Modellen immer die Voraussetzung der Isotropie und Homogenität benutzt haben. Über die Topologie des Raumes (sein Zusammenhang über große Entfernungen) wurden dabei keine Aussagen gemacht. Auch ein euklidischer (oder fast euklidischer) Raum kann eine nicht triviale Topologie haben. Wie diese beschaffen sein könnte, diese Frage bleibt offen.

Wer war Alexander Friedmann dessen Namen die Gleichungen 4.26 und 4.27 heute tragen? Friedmann publizierte seine Arbeiten über Kosmologie in der Zeitschrift für Physik 10, 377 (1922) und 21, 326 (1924). Aber sie fanden erst viel später Beachtung. Einstein las die Arbeiten Friedmanns, aber hielt sie für falsch und publizierte sofort einen entsprechenden Kommentar. Erst einige Monate später, als er Yuri A. Krutkov, einen Freund Friedmanns traf und mit ihm die Arbeiten diskutierte, musste er seinen Irrtum zugeben. Einstein schrieb deshalb sofort an die Z. f. Physik und erkannte Friedmanns Lösungen ausdrücklich als korrekt an.

Friedmann wurde 1888 in St. Petersburg als Sohn eines Komponisten und einer Pianistin geboren. Er studierte Mathematik und Meteorologie. Am ersten Weltkrieg nahm als Freiwilliger teil, leitete die Flugnavigation und fertigte

Tabellen mit ballistischen Daten für die Artillerie und den Bombenabwurf an. Nach der Revolution war er zunächst Professor für Mechanik in Perm. 1920 kehrte er nach St. Petersburg zurück und arbeitete an der Akademie der Wissenschaften. Neben der Meteorologie beschäftigte er sich mit Quantentheorie und der ART. Er starb 1925 nach offiziellen Angaben an Typhus. Aber Georg Gamow (1904 – 1968), der ein Student von Friedmann war, behauptete, er sei an einer Lungenentzündung gestorben, welche er sich bei einer seiner Ballonfahrten im Dienste der Meteorologie geholt habe.

#### 4.7. Zusammenfassung

Nach Einführung der Einstein-Gleichungen werden die Komponenten des Einstein-Tensors in der Robertson-Walker-Metrik abgeleitet. Der Energieimpuls-Tensor wird für eine „kosmische“ Flüssigkeit der Energie/Materiedichte  $\varepsilon$  und des Drucks  $P$  angegeben und für ein mitbewegtes Bezugssystem in der Robertson-Walker-Metrik umgeschrieben. Aus den 4 Einstein-Gleichungen ergeben sich die beiden Friedmann-Gleichungen für  $\dot{a}/a$  und  $(\dot{a}/a)^2$ . Die Divergenz des Energieimpuls-Tensor führt zu einem Erhaltungssatz der Masse bzw. der Energie. Wenn der Zusammenhang zwischen  $\varepsilon$  und  $P$  bekannt ist, kann  $a(t)$  durch Lösung der Friedmann-Gleichungen berechnet werden.

#### 4.8. Literatur

J.N. Islam: An introduction to mathematical cosmology. Cambridge University Press 1992

Hubert Gönner: Einführung in die Kosmologie. Spektrum Verlag 1994.

Hubert Gönner: Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. Spektrum Verlag 1996.

R.U. Sexl / H.K. Urbanke: Gravitation und Kosmologie. BI Wissenschaftsverlag 3. Aufl. 1987

Sean M. Carroll: Lecture Notes on General Relativity.  
[http://arxiv.org/PS\\_cache/gr-qc/pdf/9712/9712019.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/gr-qc/pdf/9712/9712019.pdf)