

5. Einsteins kosmologische Konstante Λ , Unsinn oder eine neue Kraft ?

5.1. Kosmologische Modelle mit $\Lambda \neq 0$

Einstein hatte zunächst die Vorstellung eines statischen Universum, d.h. es sollte $\dot{a} = 0$ sein. Um das zu erreichen fügte er seinen 4 Gleichungen noch eine Konstante Λ hinzu

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \hat{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

was für die 00-Komponente folgenden Ausdruck ergibt

$$\frac{3}{c^2 R^2} (\dot{R}^2 + c^2 \kappa) = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon + \Lambda$$

Nach Multiplikation mit $c^2/3$ und Beachten von $R = a(t)R_0$ erhalten die beiden Friedmann-Gleichungen folgende Gestalt

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon + c^2 \frac{\Lambda}{3} - \frac{c^2 \kappa}{R^2} \quad (5.2)$$

und

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\varepsilon + 3p) + c^2 \frac{\Lambda}{3} \quad (5.3)$$

Auf der rechten Seite von Gl. 5.3 bekommt die Beschleunigung einen positiven Term, wenn $\Lambda > 0$ ist. Ein positives Λ wirkt wie eine abstoßende Kraft oder eine „Antigravitation“. Wir erhalten Einsteins statische Lösung, wenn wir setzen $\dot{a} = 0$, $\ddot{a} = 0$, $p = 0$ und $\kappa = 1$ mit

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda \quad \text{und} \quad \Lambda R^2 = 1 \quad (5.4)$$

Als Einstein später erkannte, dass Beobachtungen ein dynamisches Universum nahe legen und seine Lösung sich, wie Friedmann bemerkte, als instabil herausstellte, soll er von dem größten Blödsinn seines Lebens gesprochen haben. Mathematisch ist Gl. 5.1 tatsächlich die allgemeinste Form der EG.

In den letzten Jahren ist jedoch Λ wieder zu Ehren gekommen. Die Beobachtungen der Hintergrundstrahlung erfordern einerseits eine euklidische Metrik, $\kappa = 0$, andererseits beobachtet man in der Vergangenheit keine

Abnahme von $H(t)$, wie man nach Gl. 2.19 erwarten sollte (s.a. Fig. 2.3), sondern $H(t)$ bleibt fast konstant, wächst aber in der Zukunft mit der Zeit an. Die Beobachtungen (s. unten) lassen sich am besten so deuten, dass man eine nicht verschwindende kosmologische Konstante annimmt. Damit löst sich auch das Problem eines zu kleinen Weltalters. Es ist nicht mehr $t_0 < t_H$, sondern es wird $t_0 \cong t_H$.

Nimmt man Λ in den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ auf

$$\frac{8\pi G}{c^4} T'_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda \quad (5.5)$$

so erhält dieser den Zusatz (s. Gl. 4.14)

$$g_{\mu\nu} \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_\Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_\Lambda \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

d.h. die kosmologische Konstante wirkt wie ein konstanter negativer Druck, der auf eine ziemlich ungewöhnliche Zustandsgleichung führt

$$p_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda \quad (5.7)$$

Vorsichtshalber schreibt man heute lieber

$$p_\Lambda = w \cdot \varepsilon_\Lambda \quad (5.8)$$

und versucht w aus Beobachtungen zu bestimmen. ε_Λ wird als Dichte der „Dunklen Energie“ bezeichnet. Wie bereits erwähnt, entspricht $\Lambda > 0$ einer Abstoßung und trägt nach Gl. 5.3 zu einer Beschleunigung bei. Die dunkle Energie verhält sich wie eine Antigravitation. ε_Λ hängt nicht wie die Materiedichte vom Skalenparameter $a(t)$ ab, sondern bleibt, während der Kosmos expandiert, immer konstant. $\Lambda < 0$ beschreibt eine zusätzliche Anziehung und führt zu einer Abbremsung der Dynamik. Wenn nur die dunkle Energie $\Lambda \neq 0$ in einem sonst leeren Raum wirkt und wird aus Gl. 5.3 und 5.2 für $\kappa = 0$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{c^2}{3} \Lambda \quad (5.9)$$

und

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{c^2}{3} \Lambda \quad (5.10)$$

Für $\Lambda > 0$ erhalten wir eine exponentielle Expansion,

$$a(t) = A \exp \left[\frac{c^2}{3} \Lambda t \right] \quad (5.11)$$

das so genannte Einstein-deSitter-Model. Es wurde zuerst von dem holländischen Astronomen William De Sitter (1872 - 1934) untersucht, der die Ergebnisse 1932 zusammen mit Einstein publizierte. Wir werden später noch sehen, dass das Einstein-deSitter-Model im frühen Universum eine Rolle spielte und dass sich das Verhalten von $a(t)$ in der Zukunft immer mehr einer exponentiellen Expansion annähern wird.

Wenn es nur Materie ε_M und dunkle Energie ε_Λ bei euklidischer Geometrie zu berücksichtigen gibt, dann lässt sich die kritische Dichte schreiben

$$\varepsilon_M + \varepsilon_\Lambda = \varepsilon_c \quad (5.12)$$

oder

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (5.13)$$

Kommen noch Strahlung und Raumkrümmung ($R_0 \neq 0$) hinzu, wird $H^2(t)$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 (\Omega_{0r} a^{-4} + \Omega_{0M} a^{-3} + \Omega_{0K} a^{-2} + \Omega_{0\Lambda}) = H_0^2 E(a)^2 \quad (5.14)$$

Der Beitrag der Strahlung ist mit $\Omega_{0r} a^{-4}$ berücksichtigt und der Krümmungsterm auf der rechten Seite der Gl. 5.2 durch $\Omega_{0K} a^{-2}$. Hieraus läßt sich durch Integration $a(t)$ bestimmen (s. Fig. 5.1). Wir können in Gl. 5.11 a durch $(1+z)$, was direkt beobachtbar ist, ersetzen und erhalten eine Differentialgleichung für die Rotverschiebung als $z(t)$ Funktion der Zeit

$$\left(\frac{\dot{z}}{1+z} \right)^2 = H_0^2 E(z)^2 \quad (5.15)$$

5.2. „Look-back-time“

In der Praxis genügt es für $z < 1000$, sich auf Ω_{0M} und $\Omega_{0\Lambda} = 1 - \Omega_{0M}$ zu beschränken. Dann wird

$$H_0 t = \int_0^a \frac{a' da'}{\sqrt{\Omega_{0M} a' + (1 - \Omega_{0M}) a'^4}} \quad (5.16)$$

Das Integral lässt sich durch die Substitution $x = \sqrt{a^3 |\Omega_{0M} - 1| / \Omega_{0M}}$ lösen und ergibt

$$H_0 t = \frac{2}{3} \frac{\sinh^{-1} \left(\sqrt{a^3 |\Omega_{0M} - 1| / \Omega_{0M}} \right)}{\sqrt{|\Omega_{0M} - 1|}} \quad (5.17)$$

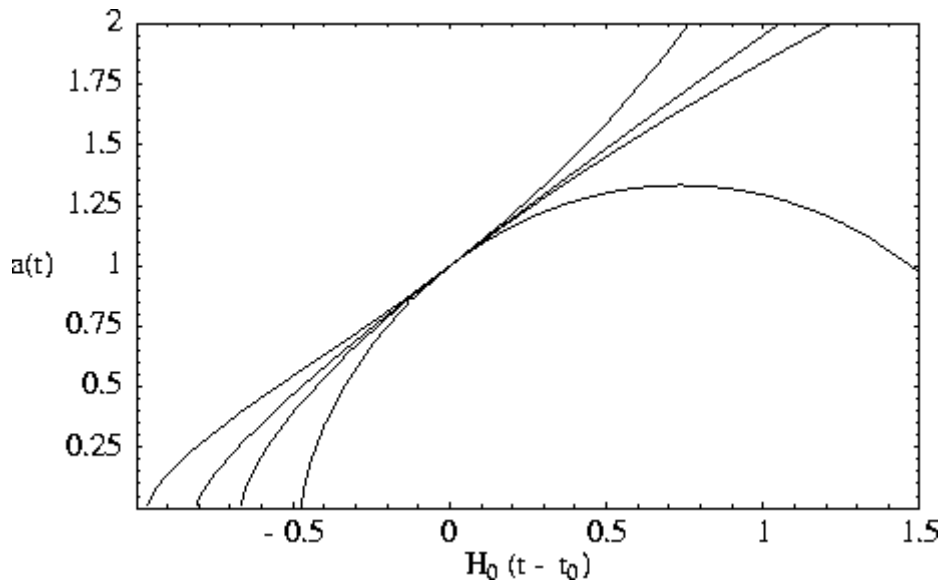


Fig. 5.1. Verlauf des Skalenparameters $a(t)$ für verschiedene Werte von Ω_M und Ω_Λ . Von oben nach unten entsprechen den Kurven folgende Parameterwahl $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7); (0.3, 0.0); (1.0, 0.0); (4.0, 0.0)$.

Nach S. M. Carroll. Living Reviews in Relativity. 7 Febr. 2001.

Die numerischen Werte entsprechen $\Omega_{0M} = 0,3$ und $\Omega_{0\Lambda} = 0,7$. Hieraus lässt sich die „look-back-time“ für ein Objekt mit der Rotverschiebung z ausrechnen oder das „Weltalter“ für $z \rightarrow \infty$ bestimmen. Das Weltalter wird nach Gl. 5.14 $t_0 \cong H_0^{-1} \cong 13,7 \cdot 10^9$ Jahre (s.auch Fig. 5.1). Für kleine Rotverschiebungen ($z \ll 1$) existiert folgende Näherungsformel

$$c(t - t_0) = \frac{c}{H_0} [z - (1 - q_0/2)z^2 + \dots] \quad (5.18)$$

Hier bedeutet
$$q_0 = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, t = t_0 \quad (5.19)$$

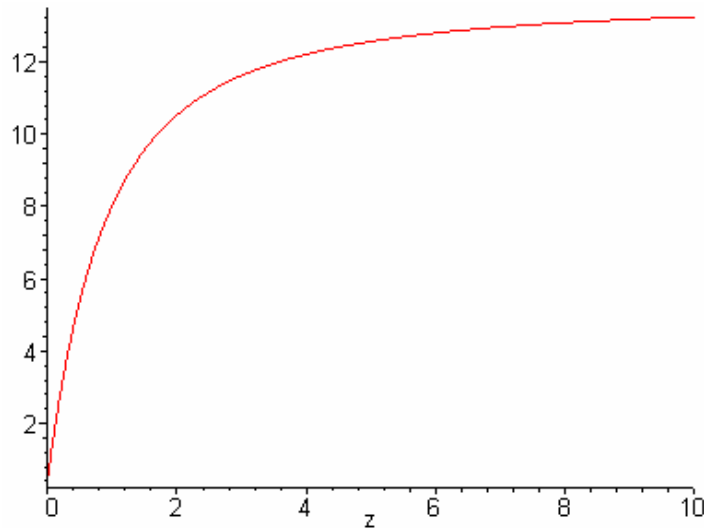


Fig. 5.2. „Look back time“ in Einheiten von 10^9 Jahren.

Wenn man $\Omega_{0M} + \Omega_{0\Lambda} = 1$ setzt, wird $q_0 = \frac{\Omega_{0M}}{2} - \Omega_{\Lambda}$.

Für $z \geq 1$ sucht man am besten eine Anpassung mit der Funktion Gl. 5.17.

5.2. Leuchtkraft-Abstand.

Wir hatten schon erwähnt, dass es mit Hilfe von Supernovae vom Typ SN Ia möglich ist, die Entfernung von Galaxien auch bei großer Rotverschiebung zu bestimmen. Diese Entfernung heißt Leuchtkraft-Entfernung d_L (luminosity distance). Das Prinzip dabei ist die Bestimmung von d_L aus Leuchtkraft L [Watt] und Strahlungsstrom S [W/m^2]

$$S = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (5.20)$$

Wir wollen annehmen, dass die Lichtquelle sich zur Zeit t der Lichtemission an einem Punkt P befindet im „Eigenabstand“ D . Der Strahlungsstrom S durchläuft eine Kugeloberfläche (in deren Zentrum sich P befindet) und wird in P_0 zur Zeit t_0 auf der Fläche $4\pi a_0^2 D^2$ detektiert. Die Photonen des Strahlungsstroms S sind um a/a_0 rot verschoben (d.h. die Photonenenergie ist kleiner geworden) und das Zeitintervall ist um a_0/a verlängert, d.h. es ist

$$hv' \frac{\delta N}{\delta t'} = hv \frac{a}{a_0} \frac{\delta N}{\delta t} \frac{a}{a_0} \quad (5.21)$$

Damit ergibt sich

$$S = \frac{L}{4\pi a_0^2 D^2} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 \quad (5.22)$$

Setzen wir wieder $a_0 = 1$, so erhalten wir durch Vergleich von Gl. 5.20 und 5.22

$$d_L = \frac{D}{a} = D(z + 1) \quad (5.23)$$

Damit ist d_L in Gl. 5.23 im Wesentlichen identisch mit dem Lichtweg, für den wir in Gl. 3.27 und 3.29 Ausdrücke angegeben haben.

5.3. Hubble-Diagramm mit SN Ia und Bestimmung von $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$.

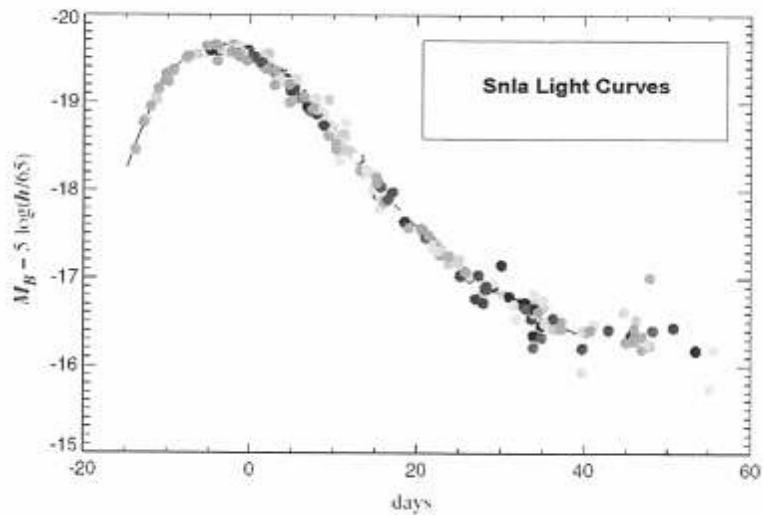
Praktisch bestimmt man Helligkeiten (s. dazu Anhang A.1).

$$m - M = 5 \log[d_L (Mpc)] + 25 \quad (5.24)$$

wobei man hier auf Abstände in Einheiten von Mpc bezieht. Diese Gleichung ergibt sich aus Gl. A.1.6, wenn man auf der rechten Seite die Entfernung auf 10^6 pc anstatt 10 pc in Einheiten setzt. Die rechte Seite von Gl. 5.19 heißt Entfernungsmodul.

Eine SN Ia erreicht im Maximum die absolute Helligkeit $M = -19,6$, wobei die Streuung durch über die Gestalt der Lichtkurve korrigiert werden kann (hellere SN haben einen steileren Abfall). Fig. 5.3. und 5.4. zeigen die Ergebnisse von zwei unabhängigen Gruppen, welche $m(z)$ bzw. $m(z) - M$ von Supernovae Ia für Werte $z < 1$ untersucht haben. Beide Gruppen finden, dass sie ihre Daten nur dann anpassen können, wenn sie eine nicht verschwindende kosmologische Konstante $\Lambda > 0$ annehmen. Wenn man noch das Ergebnis $\kappa = 0$ aus den Messungen der Fluktuation der Hintergrundstrahlung hinzu nimmt (s. dazu Kap. 6), kommt man zu einer Kombination der Parameter

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (5.25)$$



5.3. Typischer Verlauf des An- und Abklingens der (absoluten) Helligkeit einer Supernova Ia

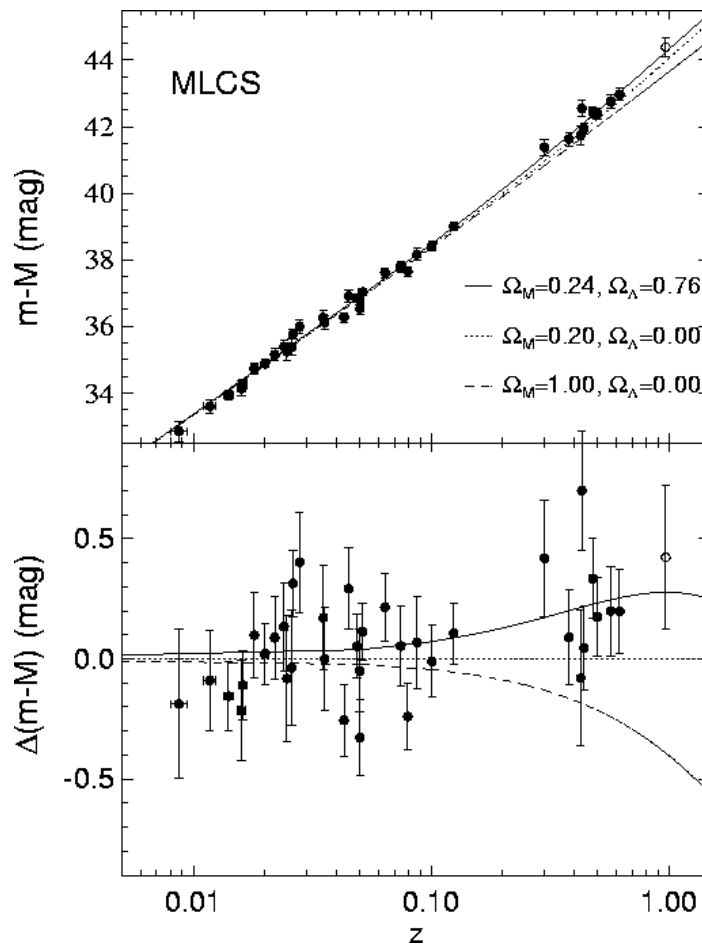


Fig. 5.4. Hubble-Diagramm des „High-z-Supernova-Team“. Die Linien sind berechnet mit verschiedenen normierten Dichten. Die Parameter der berechneten Kurven $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ sind von oben nach unten $(0.25, 0.76)$; $(0.20, 0.00)$; $(1.00, 0.00)$. (s. A.G. Riess, A.V. Filippenko et al. astro-ph /9805201)

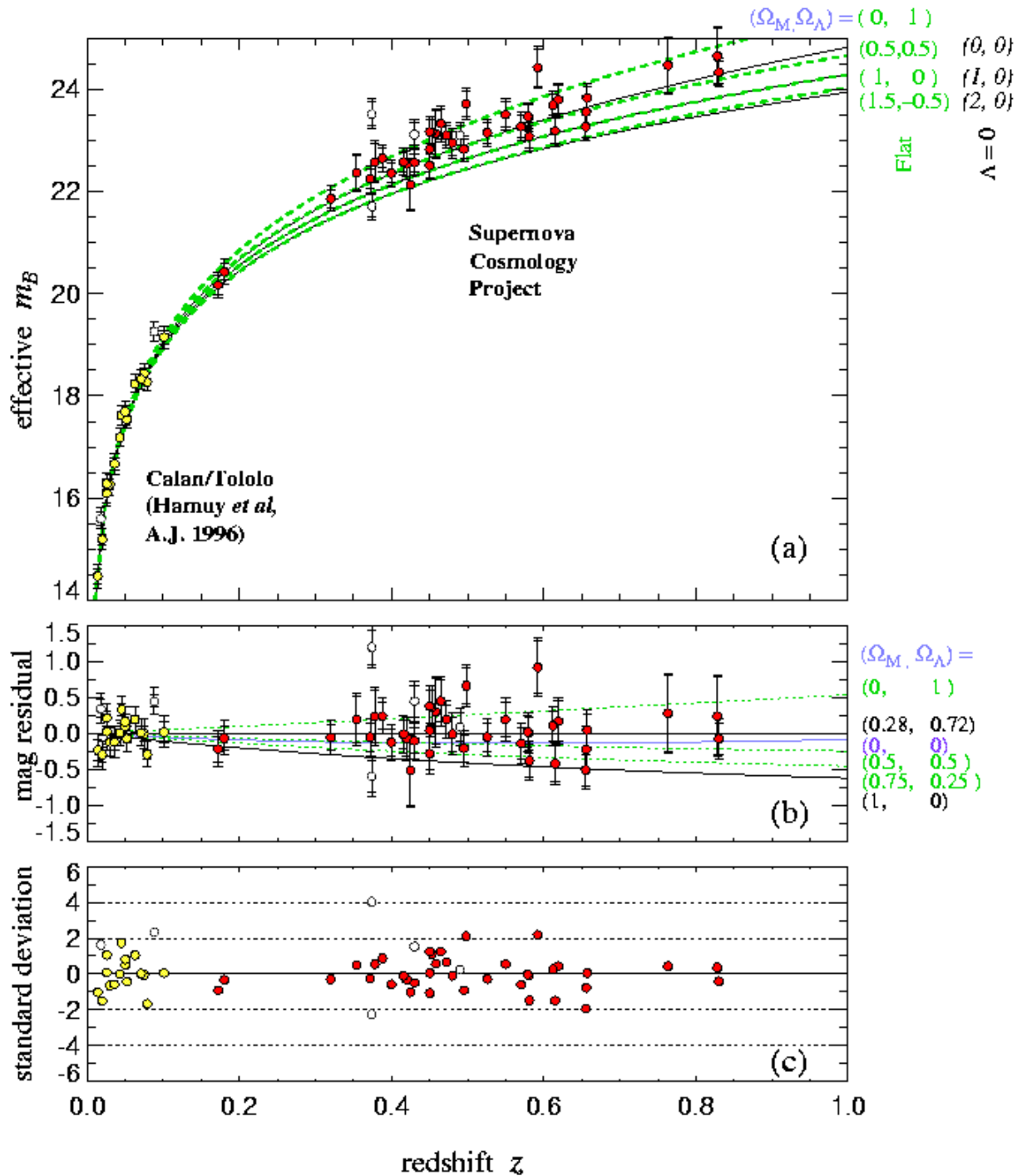


Fig. 5.5. Hubble-Diagram des Supernova-Cosmology-Projects (s. S. Perlmutter, G. Aldering et.al. <http://xxx.uni-augsburg.de/abs/astro-ph/9812133>)

wobei die wahrscheinlichsten Werte bei etwa $\Omega_M = 0,3$ und $\Omega_\Lambda = 0,7$ liegen. Der Vorteil dieser Messungen ist ihre weitgehende Unabhängigkeit von der Theorie. Die Fehlergrenzen ergeben sich einerseits aus der Streuung der absoluten Helligkeit der SN Ia. Diese kann, wie in Kap. 1 schon gezeigt, erheblich verbessert werden, wenn die Lichtkurven der SN Ia zur Korrektur der

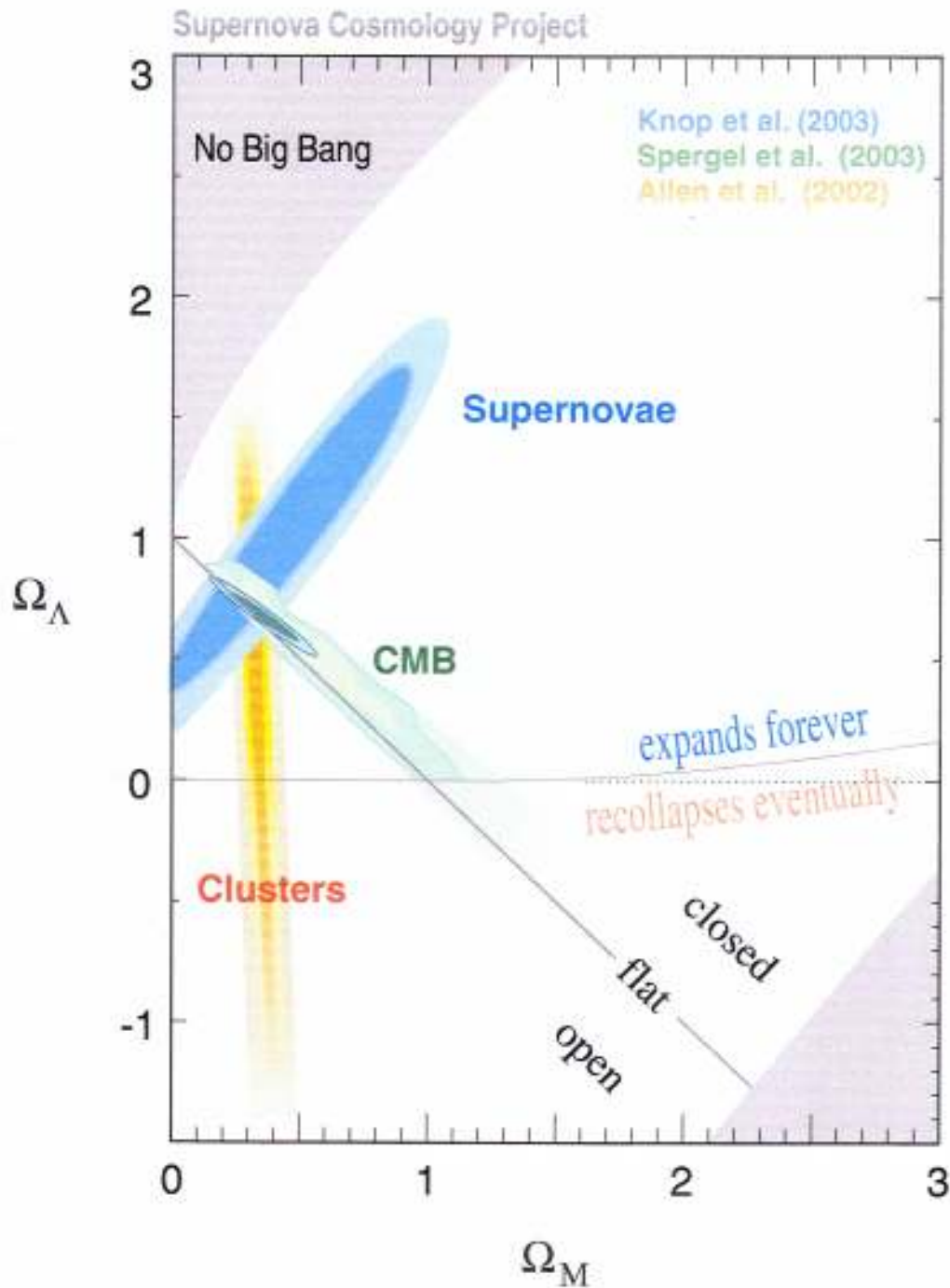
absoluten Helligkeit herangezogen werden. Andererseits wird das Licht auf seinem Weg durch interstellare Absorption geschwächt, ein Effekt, der vor allem den kurzwelligen Teil des Spektrums betrifft und der somit berücksichtigt werden kann. Auch Staubabsorption kann berücksichtigt werden, da sie die Intensität im blauen Teil des Spektrums herabsetzt und den roten Teil mehr oder weniger unbeeinflusst lässt. Gegenwärtig sind keine neuen Fehlerquellen, die bei der Deutung berücksichtigt werden müssten, bekannt geworden.

5.4. Andere Hinweise auf $\Lambda > 0$.

Das Fluktuationspektrum der Hintergrundstrahlung ist z. Zt. die wichtigste Quelle von Informationen, die komplementär sind zu den unter Kap. 5.3 gesprochenen. Der Bereich der Vertrauensgrenzen überlappt mit den SN Ia-Messungen am besten bei den Werten $\Omega_M = 0,3$ und $\Omega_\Lambda = 0,7$. Grenzen der Materiedichte sind sehr viel schwerer anzugeben. Aus der Nukleosynthese der leichten Elemente, die in den ersten Minuten der kosmischen Evolution ablief, ergibt sich mit der aktuellen Hubblekonstanten eine Baryondichte von $\Omega_B \approx 0,04$. Der Anteil der baryonischen Materie scheint aber eher klein zu sein. Die leuchtende Materie in Sternen ist wieder nur ein Bruchteil der baryonischen Materie. Die Untersuchung der Bewegung der Galaxien in Haufen Hilfe des Virialsatzes ($\overline{E}_{pot} = -2\overline{E}_{kin}$) ergibt ein $\Omega_M \approx 0,2$. Der größte Teil von Ω_M besteht demnach offensichtlich aus „dunkler Materie“, die sich nur durch Gravitation bemerkbar macht und deren mikroskopischer Aufbau bisher noch völlig unbekannt ist. Noch einmal zurück zum Fluktuationspektrum der Hintergrundstrahlung. Um seine Struktur an die Theorie anzupassen, müssen kosmologische Parameter eingegeben werden. Man erhält auf diese Weise $\Omega_M \approx 0,36$. Es ergibt sich damit nicht nur kein Widerspruch zu den SN Ia-Daten, sondern diese werden eher bestätigt. Eine weitere geeignete Methode, Grenzen für Ω_M zu bestimmen, ist der Gravitationslinseneffekt. Die Massen großer Galaxien ($M \approx 10^{12} M_{\text{Sonne}}$) wirken für dahinter liegende Punktlichtquellen (Quasare) wie Gravitationslinsen. Der Ablenkungswinkel des Lichts beträgt dabei

$$\delta\alpha = 2 \frac{R_S}{r} \quad (5.26)$$

Hier bedeutet $R_S = 2GM/c^2$ den Schwarzschildradius der Galaxienmasse M (für eine Sonnenmasse ist $R_S = 2,9979$ km), r ist die Entfernung der Galaxie von uns (gerechnet als Lichtweg). Die Statistik solcher „lensing events“ hängt von den Werten von Ω_M und Ω_Λ ab. Daraus ergibt sich eine Obergrenze für $\Omega_\Lambda < 0,7$.



5.6. Vertrauensgrenzen der Ergebnisse des Supernova-Cosmology-Projects aufgetragen in einer $\Omega_M - \Omega_\Lambda$ -Fläche. (s. Knop et al. 2003, Spergel et al. 2003, Allen et al. 2002)

5.5. Deutungen

Eine Deutung von Λ geht von dem „Vakuum“ aus, dem Grundzustand der Quantenfelder der Materie. Man kann sie sich als eine unendliche Zahl von Oszillatoren vorstellen, deren Nullpunktsenergie wie beim harmonischen Oszillator proportional ihrer Quantenergie ist (beim harmonischen Oszillator ist

sie $\hbar\omega/2$). Da diese Energie divergiert, benötigt man eine Abschneide-Energie. Das wäre z.B. die Planck-Energie (etwa $E_{Pl} \sim 10^{18}$ GeV). Könnte man diese Energie in einem Beschleuniger erzeugen, würden schwarze Löcher entstehen. Die zugehörige Energiedichte (E_{Pl}/l_{Pl}^3) beträgt $\rho_{Pl} \approx 2 \cdot 10^{110} \text{ erg/cm}^3$. Verglichen mit der Energiedichte der „Dunklen Energie“ $\rho_{\Lambda} \approx 2 \cdot 10^{-10}$ ist das ein Faktor von 10^{120} . Man muss deshalb annehmen, dass alle Beiträge der Nullpunktsenergie des Vakuums sich gegenseitig zu Null kompensieren.

Ein anderer Ansatz geht davon aus, dass es zur Zeit der Inflation ein Materiefeld ϕ (z.B. ein skalares Feld) gegeben hat. Das Potential $V(\phi)$ würde einen konstanten Beitrag leisten, wenn ein klassisches Minimum $V(\phi_0) \neq 0$ existierte. Soll ϕ ein Quantenfeld sein, trägt auch noch die Nullpunktsenergie zu Λ bei. Diese Beiträge wären allerdings zeitabhängig. Man hat dafür auch schon einen Namen gefunden: das Quintessenz-Feld. Die Beobachtungen zeigen bisher nicht die gesuchte Zeitabhängigkeit. Dazu sind sie wohl noch zu ungenau. Aber selbst innerhalb heutiger Grenzen der Beobachtung muss man Felder mit ziemlich unrealistischen Eigenschaften annehmen, um nicht in Widersprüche zu den Beobachtungen zu geraten. Wir müssen abschließend feststellen, dass das Λ -Problem bis heute ungelöst geblieben ist, obwohl bekannte Physiker sowohl aus der Teilchenphysik wie auch aus der Gravitationsphysik sich intensiv um eine Lösung bemüht haben. Einige haben schon aufgegeben und geben den frustrierenden Zustand der Diskussion zu. Andere geben zu bedenken, dass Λ gar keinen anderen Wert haben dürfe, sonst wäre die Strukturbildung weniger günstig verlaufen oder die Zeit für eine eventuelle Evolution von Leben zu kurz gewesen. Diese Argumentation führt auf das so genannte anthropische Prinzip in seiner schwachen Form: Wenn Λ nicht den gemessenen Wert hätte, gäbe es kein Leben, d.h. es gäbe uns auch als Beobachter nicht. Der spezielle Wert von Λ wäre demnach ein Auswahleffekt. Mit anderen Worten bedeutet das, der Wert von Λ ist zufällig. Es hätte auch irgendein anderer sein können, und es ist kein Gesetz bekannt, nach welchem Λ gerade den gemessenen Wert haben sollte. Der Kosmos, in welchem wir leben, ist offensichtlich ein ganz spezieller und als Produkt einer Evolution enthält er kontingente Anteile. Sie treten in unseren kosmologischen Modellen als Eingabeparameter auf, die nicht weiter erklärt werden können. Nur sind diese Parameter so gewählt, dass Leben, ja sogar intelligentes Leben möglich ist.

5.6. Zusammenfassung

Zunächst wird gezeigt, wie Einstein (vergeblich) versuchte, durch Einführung einer kosmologischen Konstanten Λ das Modell eines statischen Universums zu entwickeln. Λ kann aber auch als Energiedichte interpretiert werden, welche als Antigravitation wirkt. Es werden ihre sonderbaren Eigenschaften diskutiert. Moderne Hubble-Diagramme mit SN Ia als Normallichtquellen lassen sich nur

so interpretieren, dass eine zusätzliche Beschleunigung existiert. Das hat zu einer modernen Wiedergeburt von (vergeblich) geführt. Diese Beobachtungen an SNe Ia zusammen mit einer euklidischen Geometrie (aus der Mikrowellenstrahlung) lassen sich nur so interpretieren, dass die kritische Dichte sich aus zwei Anteilen zusammensetzt, nämlich aus 70 % dunkler Energie (Λ) und 30 % Masse, wovon nur wiederum höchstens 4 % baryonischer Masse entsprechen. Bisher gibt es keine plausible Erklärung für Λ . Falls wir annehmen müssen, dass der Wert von Λ zufällig ist, wirft das die Frage nach einem kontingenten Kosmos oder einem anthropischen Weltbild auf.

5.7. Literatur

S.M. Carroll, The Cosmological Constant. Living Reviews in Relativity. 2001
<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2001-1/index.html>

P.J.E. Peebles and B. Ratra, The Cosmological Constant and Dark Energy.
<http://xxx.uni-augsburg.de/abs/astro-ph/0207347>

A.G. Riess, A.V. Filippenko et al.
<http://xxx.uni-augsburg.de/abs/astro-ph/9805201>

S. Perlmutter, G. Aldering et al.
<http://xxx.uni-augsburg.de/abs/astro-ph/9812133>

J.L. Tonry et al. ApJ 594 (2003) 1

L. Perivolaropoulos: Accelerating Universe: Observational Status and Theoretical Implications. <http://xxx.uni-augsburg.de/abs/astro-ph/0601014>

Leonard Susskind: The Cosmic Landscape. String Theory and the Illusion of Intelligent Design. Little Brown and Company 2005.