

8. Schwierigkeiten des Standardmodells und das inflationäre Paradigma.

8.1. Stärken und Schwächen des Standardmodells

Das Standardmodell der Kosmologie, in der englischen Literatur auch Standard Big Bang (SBB) genannt, geht von sehr wenigen Voraussetzungen aus. Es sind 3 Säulen, auf welchen das Modell ruht: 1. Das kosmologische Prinzip, d.h. es gilt Isotropie und Homogenität des Kosmos. 2. Weiterhin Gültigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie, ausgedrückt durch die Einsteinschen Gleichungen. 3. Die Materie wird wie eine ideale Flüssigkeit behandelt.

Das unter diesen Voraussetzungen gebildete Modell ist außerordentlich einfach. Es beschreibt die Entwicklung des Kosmos durch einen einzigen Skalenparameter $a(t)$. Die Materiedichte verhält sich dabei wie a^{-3} , die Energiedichte der Strahlung wie a^{-4} und eine etwaige Raumkrümmung wie a^{-2} . Die Temperatur der Strahlung nimmt in der Vergangenheit wie $T \propto 1/a$ zu. Wenn Strahlungs- und Materiedichte sowie Raumkrümmung zum heutigen Zeitpunkt bekannt sind, lässt sich der Zustand der kosmischen Entwicklung für jeden früheren Zeitpunkt angeben.

Dieses klassische Modell wird durch 3 fundamentale Beobachtungsergebnisse gestützt, die es qualitativ und quantitativ erklärt: nämlich 1) durch die Hubble-Expansion, 2) die Mikrowellen-Hintergrundstrahlung und 3) durch die Häufigkeit der leichten Elemente. Damit kann die Entwicklung des Kosmos von der ersten Sekunde bis heute, d.h. nach $4,4 \cdot 10^{17}$ Sekunden, über 17 Größenordnungen in der Zeit korrekt beschrieben werden.

Allerdings gibt es im Rahmen des Modells auch eine Reihe nicht zu beantwortender Fragen, die wir hier aufzählen und auf welche wir in den folgenden Abschnitten näher eingehen wollen.

1. Das „Flatness-Problem“: Warum folgt der Kosmos dem unwahrscheinlichsten Fall $\kappa = 0$, d.h. warum ist die Geometrie euklidisch?
2. Das Horizont-Problem: Nach dem Standardmodell müsste der beobachtbare Kosmos heute aus vielen Bereichen bestehen, die kausal nicht miteinander verbunden sind. Stattdessen ist er homogen und isotrop in allen seinen Teilen.
3. Der sehr heiße Anfang des Kosmos sollte auch zur Entstehung massiver exotischer Teilchen beigetragen haben, die aber bisher nicht beobachtet wurden.
4. Auf ein Baryon kommen mehr als 10^9 Photonen. Warum gibt es keine Antimaterie im Kosmos?
5. Woher stammt die dunkle Materie?
6. Woher kommt die dunkle Energie ($\Lambda \neq 0$) ?

7. Es gibt keinen kausalen Prozess, der die Keime der Inhomogenitäten erklären kann, welche notwendig sind, um die heutigen Strukturen des Kosmos zu verstehen.
8. Das Standardmodell hat bei $t = 0$ eine nicht behebbare Singularität. Offensichtlich versagt die Allgemeine Relativitätstheorie als klassische Theorie bei sehr frühen Zeiten (Planckzeit).

8.2. Das Horizontproblem

Das Horizont-Problem des Standardmodells ergibt sich wie folgt. Wenn wir die Zeit rückwärts laufen lassen bis in die Epoche des von Strahlung dominierten Kosmos, dann schrumpft der Teilchenhorizont mit $d_H = 2ct$ rascher als der Skalenparameter $a(t) \propto t^{1/2}$ (s. Gl. 3.35 und Fig. 8.1). Am Ende zerfällt der frühe Kosmos in Bereiche, die nicht mehr kausal miteinander verbunden sein können, weil die Zeit, die seit dem „Urknall“ vergangen ist, zu kurz war, um alle Gebiete, die heute beobachtbar sind, durch Wechselwirkungen, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, zu verbinden (s. dazu Fig. 8.2). Aus Betrachtungen der Entropie kann man abschätzen, dass die Zahl der nicht zusammenhängenden Bereiche in der Größenordnung 10^3 liegt. Damit bleibt die hohe Isotropie und Homogenität des CMB ungeklärt.

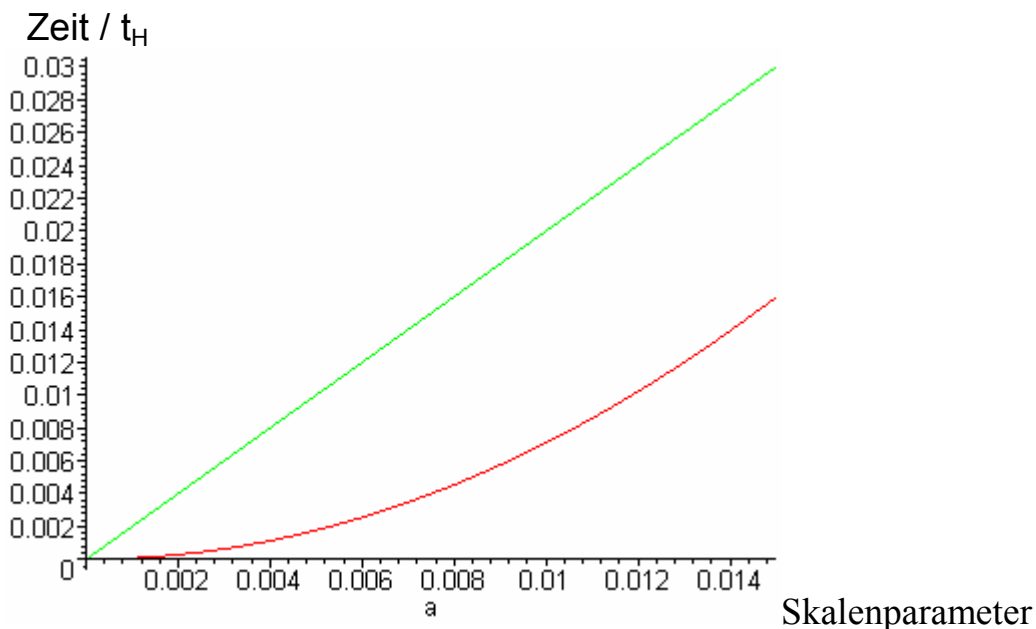


Fig. 8.1. Zur Veranschaulichung des Horizont-Problems: Die Expansion des Horizonts verläuft mit Lichtgeschwindigkeit (grün) und ist langsamer als die Expansion des Skalenparameters (rot)

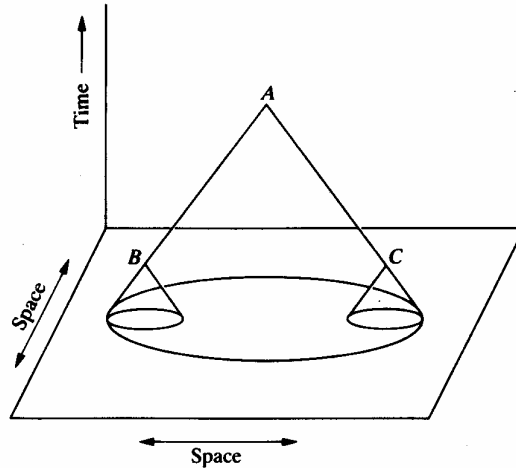


Fig. 8.2. Die Konsequenz von Fig. 8.1.: Wir beobachten heute (d.h. bei A) kosmische Mikrowellenstrahlung (CMB), die aus ganz verschiedenen Regionen des Kosmos kommt, ohne dass sich Unterschiede (bis auf Anisotropien $<10^{-4}$) feststellen lassen. Nach der Figur war die Zeit, die seit dem Beginn vergangen ist, zu kurz zum Austausch von Lichtsignalen zwischen B und C.

8.3. Das Problem der „Flachheit“.

Wenn Ω dicht bei 1 liegt, dann können wir die Friedmanngleichung (s. Gl. 5.2 und 5.14) dazu benutzen, das Verhalten des Ausdrucks $\Omega - 1$ als Funktion der Zeit zu beschreiben. $\Omega - 1$ ist proportional zum Krümmungsterm

$$H_0^2(\Omega - 1) = -\frac{\kappa c^2}{R^2} \quad (8.1)$$

Wir können Ω durch die Energiedichte ε ausdrücken

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2} \varepsilon \quad (8.2)$$

Division durch H_0^2 und Ω ergibt

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} = -\frac{\kappa}{R^2} \frac{3c^4}{8\pi G \varepsilon} \quad (8.3)$$

Nehmen wir noch die Abhängigkeit vom Skalenparameter $R^2 \propto a^2$ und $\varepsilon \propto a^{-4}$, dann wird

$$\left| \frac{\Omega - 1}{\Omega} \right| = C \cdot a^2 \quad (8.4)$$

und nimmt proportional zu a^2 ab, wenn wir die Zeit zurück laufen lassen. Wäre z.B. heute

$$|\Omega - 1/\Omega|_0 \cong 0,02,$$

dann wäre 1 Sekunde nach dem Urknall

$$|\Omega - 1/\Omega|_{1s} \cong 4,6 \cdot 10^{-20}$$

Das bedeutet aber, dass die Anfangsbedingungen unvorstellbar genau eingestellt sein müssten, damit die Abweichung vom euklidischen Raum ($\kappa = 0$, $\Omega = 1$) bei dem heutigen Wert von wenigen Prozent landen. Das ist eine sehr unbefriedigende Situation.

8.4. Entropie und Strahlung

Wir hatten mit Gl. 6.16 festgestellt, dass die Entropiedichte proportional zur Photonendichte ist. Nach der Abkopplung des Strahlungsfelds ist die Zahl der Photonen pro Volumen konstant gleich $n_\gamma = 4,2 \cdot 10^8 m^{-3}$. Damit bleibt auch die Entropie im Wesentlichen konstant. Die Entropiedichte der Photonen ist nach Gl. 6.16

$$s_\gamma = 1,5 \cdot 10^9 k_B m^{-3}$$

Schätzt man das gegenwärtige Volumen mit dem Radius des Horizonts zu $V \approx 10^{78} m^3$ ab, so erhält man für die gesamte Entropie der Strahlung

$$S_\gamma \approx 10^{87} k_B$$

Die Neutrinos ergeben etwa den gleichen Betrag. Für die Abschätzung wurde der Faktor vor der Zehnerpotenz weggelassen. An der Konstanz der Entropie ändert die Strahlung der astronomischen Objekte nur wenig. Das bedeutet aber, dass der größte Teil der Entropie schon bei Beginn des Kosmos (beim Urknall) entstanden sein muss.

Ein anderes Problem ergibt sich aus dem Verhältnis der Baryonenzahl zur Zahl der Photonen $\eta = 6,1 \cdot 10^{-10}$. Es bedeutet, dass auf ein Baryon $1,6 \cdot 10^9$ Photonen kommen. Geht man davon aus, dass bei genügend hoher Temperatur Gleichgewicht zwischen Materie und Antimaterie herrschte, dann muss sich beim Abkühlen das Gleichgewicht um η zugunsten der Materie verschoben haben. Das bedeutet, es hat eine winzige Symmetriebrechung gegeben, der wir

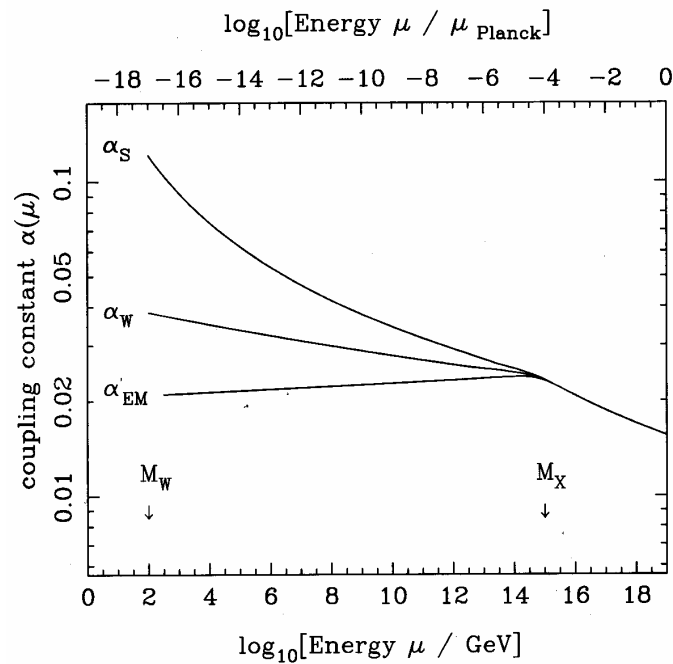


Fig. 8.3. Verlauf der Wechselwirkungsparameter für elektromagnetische WW (α_1), schwache (α_2) und starke WW (α_3) bei hohen Energien (obere Skala in Einheiten der Planckenergie). Die drei Wechselwirkungen konvergieren bei ca. 10^{16} GeV. Ein Schnitt mit der Gravitation (α_G) ist nur in supersymmetrischen Theorien möglich und ist hier weggelassen.

das Überleben der Materie und damit unsere Existenz verdanken. Ob die Symmetriebrechung bereits in den bekannten Wechselwirkungen enthalten ist (z.B. in der schwachen Wechselwirkung) oder ob sie durch eine Abweichung vom thermischen Gleichgewicht bei der Expansion und Abkühlung auftrat, ist ungeklärt.

8.5. Eine inflationäre Expansion würde viele Rätsel lösen.

Die Idee der kosmischen Inflation stammt ursprünglich von Alan Guth, der Ende der siebziger Jahre als „Postdoctorial Fellow“ an der Cornell Universität arbeitete. Er beschäftigte sich als theoretischer Physiker damals mit „Grand Unified Theories“ (GUTs). Die drei Wechselwirkungen, welche in der Teilchenphysik eine Rolle spielen, sind die elektromagnetische Wechselwirkung mit der Symmetriegruppe U(1), die schwache Wechselwirkung mit der Symmetriegruppe SU(2) und die starke Wechselwirkung, Symmetriegruppe SU(3). Sie unterscheiden sich nicht nur in ihren Wirkungen und in ihren Reichweiten, sondern eben auch in der Symmetrie ihrer inneren Freiheitsgrade, wie z.B. Spin, Isospin, Flavor, etc. Diese Symmetrien werden Eichsymmetrien genannt. Man suchte nun nach einer umfassenden Symmetriegruppe, $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Eine höhere Symmetrie müsste bei Teilchenenergien auftreten, bei welchen die Extrapolation der gemessenen Wechselwirkungsparameter zu einen Wert hin konvergiert (s. Fig. 8.2). Bei diesen Energien, wie sie

möglicherweise unmittelbar nach dem Urknall herrschten, gab es dann nur noch eine umfassende Wechselwirkung („grand unification“). Die uns bekannten Wechselwirkungen wären beim Abkühlen durch Brechung der Eichsymmetrien „auskondensiert“. Dazu muss man sagen, dass heute eine experimentelle Absicherung nur bis zu einigen 100 GeV existiert, also weit links in der Skala von Fig. 8.2. Der dann folgende Bereich bis zu 10^{16} GeV heißt im Jargon der Hochenergiephysiker die „Wüste“, eben wegen der fehlenden Experimente, aber auch weil man nichts grundsätzlich Neues erwartet. Allerdings ist man weitgehend überzeugt davon, dass in diesem Bereich eigentlich keine neue Physik zu erwarten ist, d.h. eichinvariante Quantenfeldtheorien sollten bei allen Energien richtig sein, bei welchen die Wechselwirkung mit der Gravitation noch keine Rolle spielt ($E < 10^{18}$ GeV). Darüber hinaus allerdings erwartet man eine neue Physik, welche eine Quantentheorie der Gravitation erfordert. Eben wegen der fehlenden experimentellen Absicherung haben die Modelle, um die es hier geht, einen wesentlich größeren spekulativen Anteil, als die Physik des Standardmodells, die bis einschließlich Kap. 7 behandelt wurde.

In den Theorien, welche Alan Guth untersuchte, waren Symmetriebrechungen mit Phasenumwandlungen verbunden (Beispiel einer bekannten Phasenumwandlung ist der Übergang flüssig - gasförmig). Beim Abkühlen entsteht eine „Tiefte mperaturphase“, welche den Raum in Domänen aufteilt. An den Bereichsgrenzen ändert sich der Ordnungsparameter ziemlich abrupt. Nach den „grand unified theories“ (GUTs) sind die Felder dort stark gestört. A. Guth untersuchte null-dimensionale Störungen, sogenannte magnetischer Monopole, die als massive Teilchen auftreten. Da aber offensichtlich keine magnetischen Monopole beobachtet werden, sollte es einen Mechanismus geben, der ihr Auftreten sehr unwahrscheinlich macht. Das könnte eine Phase exponentieller Expansion $a(t) \propto \exp \alpha t$ sein, welche die Konzentration der magnetischen Monopole verdünnen hilft. Hierzu ist es notwendig, dass $\Omega_\Lambda \approx 1$, d.h. der bei weitem dominierende Beitrag ist. Aus Gl. 5.11 wird dann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Omega_\Lambda - \frac{\kappa}{a^2 R^2} \approx H_0^2 \quad (8.5)$$

$a(t)$ wird bald so stark wachsen, dass der Krümmungsterm rechts bald vernachlässigt werden kann. Die Lösung, die de Sitter schon angegeben hat, lässt sich bei nur wenig veränderlicher Funktion $H(t)$ schreiben

$$a(t) = a_1 \exp \int_{t_1}^{t_2} H(t) dt \approx \frac{a_1}{H} \exp H(t_2 - t_1) \quad (8.6)$$

mit

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_\Lambda \quad (8.7)$$

Wenn man davon ausgeht, dass die Entropie am Anfang sehr klein und von der Größenordnung k_B gewesen ist, dann muss die Zunahme des Volumens $V_f/V_i \approx 10^{87}$ gewesen sein und damit sollte die Zunahme des Skalenparameters wenigstens $a_f/a_i \approx 10^{29} = e^{66,7}$ betragen.

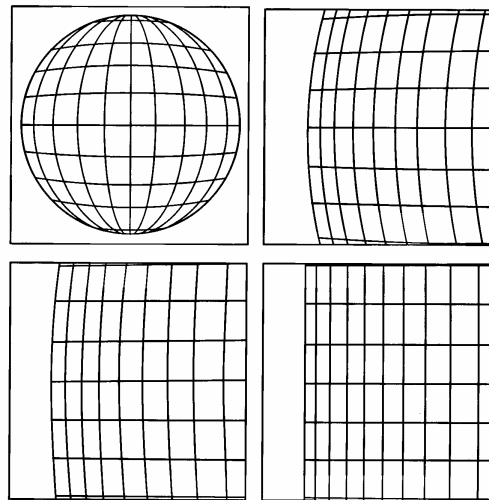


Fig. 8.3. Beginn: positive Krümmung mit endlichem Krümmungsradius. Bei exponentieller Expansion nimmt der Krümmungsradius rasch zu. Am Ende ist der Krümmungsradius über alle Maßen gewachsen, so dass ein euklidischer Raum entstanden ist.

Bei geeigneten Annahmen von ε_Λ schafft ein solcher Ansatz eine genügend starke „Verdünnung“ der Reliktmonopole und löst das Horizontproblem, weil sich der Raum rascher ausbreitet, als Lichtsignale, so dass der heute dem Beobachter zugängliche Raum kausal zusammenhängend ist. Schließlich geht die Raumkrümmung in Gl. 8.3 und 8.5 gegen Null. Der Raum wird euklidisch, ohne dass spezielle Anfangsbedingungen erforderlich sind (s. Fig. 8.3). Der Beginn der Inflation kann aus $E_1 < 10^{16}$ GeV abgeschätzt werden, was auf eine Zeit $t_1 > 10^{-38}$ s führt. Wie aber sollte im frühen Kosmos ein zeitweise konstantes (oder höchstens schwach veränderliches) ε_Λ auftreten?

8.6. Skalares Feld und Symmetriebrechung.

Ein Urfeld, welches die Inflation in Gang gesetzt hat, sollte unabhängig vom Skalenfaktor $a(t)$ sein wie die dunkle Energie. Dazu gibt es sehr viele Modelle. Am einfachsten geht man von einem skalaren Feld aus; auch das Higgs-Feld der Teilchenphysik, dessen Wechselwirkung mit den Teilchenfeldern die Teilchenmassen erzeugt, ist ein skalares Feld. Ein skalares Feld könnte auch bei Vereinigung der 3 Wechselwirkungen bei 10^{16} GeV eine Rolle gespielt haben. Skalare Felder haben den Vorteil besonders einfach zu sein. Wir setzen die

Lagrange-Dichte des skalaren Feldes zunächst im Minkowski-Raum wie folgt an

$$L = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (8.8)$$

mit $\eta^{\mu\nu} = (1 \ -1 \ -1 \ -1)$. Der Variationsansatz

$$\delta \int L \, dV dt = 0 \quad (8.9)$$

führt auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (8.10)$$

woraus man

$$\frac{\ddot{\phi}}{c^2} - \Delta \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (8.11)$$

erhält. Für das Potential V kann man verschiedene Ansätze machen. Der einfachste Ansatz ist

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (8.12)$$

Man erhält so aus Gl. 8.11 die Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{\ddot{\phi}}{c^2} - \Delta \phi + m^2 \phi = 0 \quad (8.13)$$

Fordert man Homogenität, wird $\Delta \phi = 0$. Will man Phasenumwandlungen beschreiben, sollte das Potential auch Potenzen höherer Ordnung in ϕ enthalten (i. a. 4. Ordnung). Ein Beispiel ist das sogenannte Higgs-Potential

$$V(\phi) = -\frac{1}{2\lambda} (m^2 - \lambda \phi^2)^2 \quad (8.14)$$

mit $m^2 < 0$ und $\lambda < 0$. Das Potential (s. Fig. 8.5) hat bei $\phi = 0$ ein Maximum

$$V(0) = -\frac{m^4}{2\lambda} \quad (8.15)$$

und 2 Minima bei

$$x_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \quad (8.16)$$

mit

$$V(x_{\pm}) = 0 \quad (8.17)$$

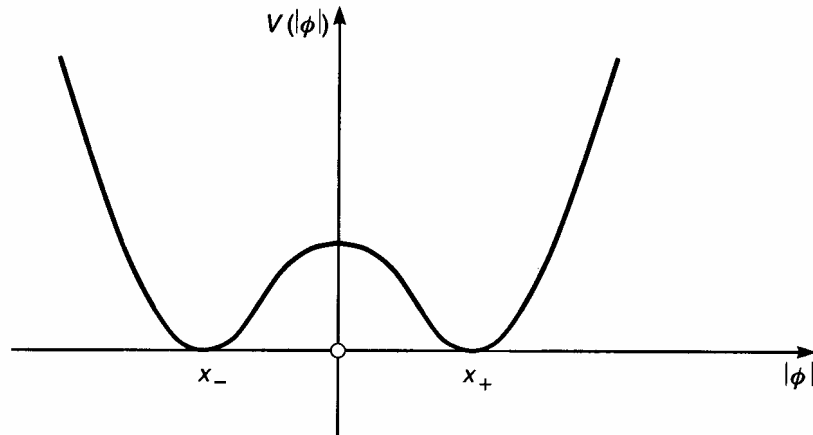


Fig. 8.4. Verlauf des Potentials von Gl. 8.18. Nach H. Goenner: Einführung in die Kosmologie. Spektrum Akademischer Verlag 1994.

Wir sehen nun, wie ein ε_Λ zustande kommen könnte. Wenn das Materiefeld ein Potential wie in Fig. 8.4 besitzt, dann kann es vor einem Phasenübergang einen metastabilen Zustand bei $\phi=0$ einnehmen. Damit gäbe es ein zeitweise konstantes ε_Λ . Nur muss ε_Λ auch schnell genug wieder abgebaut werden, denn die inflationäre Expansion soll nur kurze Zeit andauern („the graceful exit problem“).

Um das Modell entsprechend zu entwickeln, müssen wir Gl. 8.8 statt in Minkowski-Metrik $\eta^{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$ in der Robertson-Walker-Metrik mit den entsprechenden $g^{\mu\nu}$ aufschreiben. Dabei wird die Lagrange-Dichte

$$L = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (8.18)$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \cdot g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (8.19)$$

Hier ist $g = \text{Det} |g_{\mu\nu}|$. Nach Einsetzen von $g^{\mu\nu}$ und Differenzieren erhält man

als Bewegungsgleichung des Feldes eine modifizierte Klein-Gordon-Gleichung

$$\ddot{\phi} - a^{-2}\nabla^2\phi + 3c\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (8.20)$$

wobei wir das Glied mit ∇^2 als Folge der Homogenität weglassen, die sich hier von selbst einstellt, weil a (im Nenner) exponentiell anwächst. Setzt man jetzt z.B. das Potential Gl. 8.12 ein, so erhält man die Gleichung einer gedämpften Schwingung

$$\ddot{\phi} + 3cH\dot{\phi} + m^2\phi = 0 \quad (8.21)$$

Die Schwingung wird durch die Expansion des Raumes gedämpft. Wenn die Dämpfung groß genug ist, bewegt sich das System im aperiodischen Grenzfall, was im Jargon der inflationären Kosmologie als „slow roll down“ bezeichnet wird. Die zweite Ableitung kann dann vernachlässigt werden. Das skalare Feld ist dann genügend langsam veränderlich. Danach bleibt nach Wiedereinsetzen von $m^2\phi = \frac{\partial V}{\partial\phi}$ folgende Gleichung übrig

$$3cH\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial\phi} \quad (8.22)$$

Um an die Gleichungen 8.5 – 8.7 anschließen zu können, benötigen wir noch einen Ausdruck, der anstelle der klassischen Dichte steht. Mit dem Energie-Impulstensor $T_{\mu\nu}$ ist es möglich, die entsprechenden Ausdrücke zu finden. Die Feldtheorie bietet zur Berechnung von $T_{\mu\nu}$ aus der Lagrangedichte des Feldes ein Standardverfahren an

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)\right] \quad (8.23)$$

Bei Vernachlässigung der Gradientenglieder (Homogenität) und setzen von $c=1$ erhält man hieraus

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (8.24)$$

und

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (8.25)$$

Wir suchen zunächst den Zusammenhang von a und ϕ . Dazu schreiben wir die Friedmann-Gl. auf, wobei wir annehmen wollen, dass sich die Energiedichte des skalaren Feldes wie der Λ -Term verhält und der Krümmungsterm sowie etwaige

Volumen abhängige Felder während der inflationären Epoche schnell genug verschwinden

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right) = \frac{1}{3\bar{M}_p^2} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right) \quad (8.26)$$

Hier ist $\bar{M}_p = \sqrt{\frac{c\hbar}{8\pi G}}$ die reduzierte Planckmasse ($c = 1, \hbar = 1$)

Die Bedingung $\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ ist die „slow roll condition“. Mit erhalten wir

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3c^2} V(\phi) = \frac{1}{3\bar{M}_p^2} \left(\frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \quad (8.26a)$$

und

$$H \approx \left(\frac{8\pi G}{3c^2} \right)^{1/2} V(\phi)^{1/2} = \frac{m\phi}{\sqrt{6}\bar{M}_p} \quad (8.26b)$$

Mit der „slow roll condition“ erhält man außerdem aus Gl. 8.24 und 8.25 wieder

$$p = -\varepsilon \quad (5.7)$$

d.h. es gilt genähert die Zustandsgleichung Gl. 5.7. Man beachte: nur mit dieser Zustandsgleichung erhalten wir einen negativen Druck, welcher der Gravitation entgegenwirkt und Inflation erzeugt.

Aus Gl. 8.26a erhalten durch Differenzieren nach der Zeit

$$2H\dot{H} = -\frac{1}{2\bar{M}_p^2} m^2 \phi \dot{\phi} \quad (8.27)$$

Danach dividieren wir durch $3H\dot{\phi} = -m^2\phi$

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{1}{2\bar{M}_p^2} \dot{\phi} \quad (8.28)$$

integrieren über ϕ und schreiben links die Hubblefunktion aus

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln a = -\frac{1}{2\bar{M}_p^2} \phi \dot{\phi} \quad (8.29)$$

Nach Integration über die Zeit erhalten wir schließlich

$$a(t) = a_i \exp \frac{1}{2\bar{M}_p^2} [\phi_0^2 - \phi^2(t)] \quad (8.30)$$

wobei wir für $V(\phi)$ das einfache quadratische Potential der Gl. 8.12 (Es ist das Potential von Andrei Lindes chaotischer Inflation). Aus Gl. 8.22 und 8.26b lässt sich $\dot{\phi}$ eliminieren

$$\dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2}{3}} m \bar{M}_p \quad (8.31)$$

was integriert nach der Zeit

$$\phi = \phi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} m \bar{M}_p \cdot t \quad (8.32)$$

ergibt. Nach Linde startet das Feld bei etwa $\phi_0 \approx 10^6$ (in Planck-Einheiten). Dann sollte $m \approx 3 \cdot 10^{-6}$ sein, damit die Fluktuationen der CMB die richtige Größe bekommen. Die inflationäre Expansion klingt ab, wenn der Exponent von Gl. 8.30 kleiner als eins wird also etwa nach $t \leq 4 \cdot 10^{11} t_p$ (mit der Planckzeit $t_p = 0,538 \cdot 10^{-43} s$) d.h. die Inflation endet nach etwa $2 \cdot 10^{-32} s$.

Vergleich von Gl. 8.30 und 8.26a liefert den Zusammenhang

$$a(t) = a_i \exp H \Delta t \quad (8.33)$$

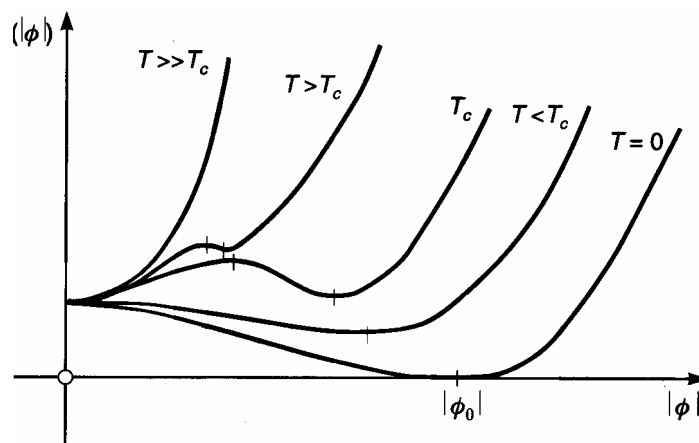
Nach jeweils einer Hubble-Zeit $\Delta t = H^{-1}$ vergrößern sich die Längenmasse um den Faktor $e = 2,718$. Die Zahl der e-Entfaltungen während der inflationären Periode ist

$$N = \ln \frac{a_f}{a_i} = \int_{t_i}^{t_f} H(t) dt = \int_{\phi_{ii}}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \frac{1}{\bar{M}_p^2} \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V'} d\phi = \frac{8\pi}{M_p^2} \frac{\phi_i^2}{4} \quad (8.34)$$

Der letzte Ausdruck rechts ergibt sich aus der Division von Gl. 8.26a durch 8.22. Der Wert von N hängt wesentlich von der Wahl des Potentials V ab. Mit dem quadratischen Potential Gl. 8.12 wird $N = 8\pi \phi_0^2 / 4 \approx 2\pi \cdot 10^{12}$. In anderen Modellen wird N mit mindestens 60 angesetzt, um das Horizontproblem zu lösen.

Zur Geschichte des inflationären Paradigmas ist zu bemerken, Alan Guth, von dem die Idee ursprünglich stammte, untersuchte zunächst Phasenübergänge 1. Ordnung mit einem Potential wie in Fig. 8.4. Die Bereiche, die Inflation zeigen,

verhalten sich ähnlich wie Gasblasen in einer siedenden Flüssigkeit. Aber die Blasen können kollidieren und expandieren überhaupt zu stark. Um das zu vermeiden, ist eine Feinabstimmung notwendig, welche das Modell gerade beseitigen wollte. 1982 wurde von Steinhardt und Albrecht ein Modell mit einem Phasenübergang 2. Ordnung vorgeschlagen. Fig. 8.5 zeigt das Potential. Wenn die Temperatur unter eine kritische Temperatur T_c sinkt, kann das skalare Feld in das neue Minimum abrollen (neue Inflation). Das heute bevorzugte Modell hat den Namen „chaotische Inflation“ erhalten und stammt von Andrej Linde. Es enthält keine Phasenumwandlung. In diesem Modell werden nur minimale Annahmen gemacht, insbesondere versucht Linde ohne explizite Anfangsbedingungen auszukommen. Nach Linde muss die Amplitude des Feldes zu Beginn der Inflation etwa 10^6 Planck-Einheiten sein (s.oben), was sehr hoch erscheint, aber die Masse wird mit $m \approx 10^{-6} M_p$ angesetzt, so dass die Energiedichte nicht größer als 1 Planckeinheit beträgt.



8.5. Die Freie Energie eines Phasenübergangs 2. Ordnung enthält ein effektives Potential, das von der Temperatur abhängig ist.

Bei der Expansion erfolgt Abkühlung. Beim Übergang in das Minimum, bzw. in das wahre Vakuum, wird potentielle Energie in Feld-Energie umgesetzt. Das Feld bleibt in einem hoch angeregten Zustand zurück und erzeugt Teilchen. Dabei entsteht eine Abkühlung. Die Wechselwirkungen der Teilchen, die möglicherweise in andere zerfallen, erzeugen eine kinetische Energiedichte (d.h. Wiederaufheizung), der eine negative potentielle Energiedichte aus der Gravitation entgegensteht. Bei euklidischer Geometrie kompensieren sich beide gerade.

Zusammenfassend können wir feststellen: Die inflationäre Expansion behebt viele der oben genannten Schwierigkeiten. Sie verlangt eine Epoche beschleunigter Expansion, $\ddot{a} > 0$, die von der potentielle Feldenergie angetrieben

wird. Weiterhin müssen die „Bedingungen des langsamen Abrollens“ erfüllt sein. Das bedeutet

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0 \quad (8.31)$$

Die spezielle Gestalt des Potentials $V(\phi)$ und die der Feldfunktion ϕ sind dabei von geringerer Bedeutung. Das drückt sich im Attraktor-Verhalten von $H(t)$ aus und bedeutet Folgendes: Wenn es beim Abrollen des skalaren Feldes eine inflationäre Lösung gibt, dann nähern sich alle linearen Störungen dieser Lösung an und zwar mindestens exponentiell (s. dazu A.R. Liddle & D.H. Lyth: *Cosmological Inflation and Large Structure*, Cambridge University Press 2000). Nach erfolgtem Abrollen endet die Inflation und geht in die Expansion des Standardmodells über. Diese Prozesse wurden für das quadratische Potential näher untersucht. Es besteht die Hoffnung, dass sich in Zukunft bei besserem Kenntnis des Fluktuationsspektrums sich viele Modelle für $V(\phi)$ ausschließen lassen. Das beobachtete Fluktuationsspektrum des CMB unterstützt eher möglichst einfache Modelle.

8.7. Quantenfluktuationen.

Man erinnere sich, dass der Ereignishorizont der geometrische Ort aller Punkte ist, von welchen ein Lichtsignal den Beobachter nicht mehr in endlicher Zeit erreicht. Bei exponentieller Expansion ist der Abstand zum Ereignishorizont (in mitbewegten Koordinaten s. Gl. 3.37) endlich und während der Inflation bei schwach veränderlichem $H(t)$ fast stationär

$$r_{EH} = \int_t^\infty \frac{c dt}{a(t)} = c \exp \int_t^\infty -H(t) dt \approx \frac{c}{H(t)} \quad (t \rightarrow 0) \quad (8.32)$$

Der Ereignishorizont bildet eine absolute Begrenzung für die Moden $k_s = 2\pi/\lambda_s$ des Felds, d.h. $\lambda_{\max} \approx \frac{c}{H}$. Die Unschärfebeziehung besagt in diesem Fall

$$\Delta p = \hbar \Delta k = \hbar \cdot 2\pi \frac{H}{c} \quad (8.33)$$

Es ist deshalb sinnvoll, nach Fluktuationen $\Delta E = |\delta\phi| = \hbar/\Delta t = \hbar \cdot H$ in der Hintergrundstrahlung zu suchen, die als Quantenfluktuationen beginnen, nach Überqueren des Horizonts stehen geblieben sind und zu klassischen Störungen werden. Ihre räumliche Ausdehnung ist aber durch die Inflation zu makroskopischer Größe angewachsen. Sie bilden die Keime für die Entstehung von Strukturen.

8.8. Zusammenfassung

Eine Reihe von Problemen können nicht im Rahmen des Standardmodells gelöst werden. Sie können aber durch Annahme einer sehr frühen inflationären Epoche, während dessen $\ddot{a}(t) > 0$, befriedigend erklärt werden. Dazu gehören 1) das Horizontproblem, 2) das Flachheitsproblem, das Entropieproblem. 3) Das Auftreten exotischer Teilchen. Die inflationäre, exponentielle Expansion um einen Faktor größer als $\exp(60)$ wird durch die Energie eines „Urfelds“ (auch Inflaton-Feld genannt) ausgelöst. Die Energie hält sich während der inflationären Epoche auf einem nahezu konstanten Wert, muss danach aber genügend schnell wieder abklingen. Zu 4): zwischen Materie und Antimaterie muss es eine geringfügige Asymmetrie gegeben haben (ca. $1:10^9$), die durch Inflation nicht zu erklären ist. Das Modell gibt auch auf 5) und 6) keine Antwort. 7) Die Keime für die Strukturbildung werden durch Quantenfluktuationen des Inflaton-Felds gebildet, die durch die Inflation zu makroskopischer Größe aufgebläht werden. 8) Die Singularität bei $t = 0$ kann nur im Rahmen der Quantengravitation behoben werden, die in inflationären Modellen meist nicht diskutiert wird. Das bedeutet, dass man außerhalb der Planckgrößen bleibt.

8.9. Literatur

E.W. Kolb, The inflationary decade. Phys. Rept. 227 (1993) 2

Andrei Linde: Elementarteilchen uninflationärer Kosmos. Spektrum. Akademischer Verl. 1993

Gary Scott Watson: An Exposition on Inflationary Cosmology . astro-ph/0005003. <http://nedwww.jpac.caltech.edu/level5/Watson>

Andrew R. Liddle, David Lyth: Cosmological Inflation and Large-Scale Structure. Cambridge Univ. Press 2000

Gerhard Börner; The Early Universe. 3rd Edition. Springerverl. 2003

Robert H. Brandenberger, Principles, Progress and Problems in Inflationary Cosmology. ArXiv: astro-ph/0208103

Andrei Linde, Inflation and String Cosmology. <http://xxx.uni-augsburg.de/abs/hep-th/0503195>