

10. Was war am Anfang?

10.1. Die Planckschen Einheiten.

Das Modell der Inflation benötigt keine Anfangsbedingungen, ja es scheint nur die Fluktuationen von der Schlussphase der Inflation zu erhalten und jede „Erinnerung“ des Systems an frühere Epochen auszulöschen. Die Frage nach dem, was davor war, erscheint demnach vielleicht überflüssig, sie ist aber keineswegs sinnlos. Die Schwierigkeit der Beschreibung einer prä-inflationären Epoche hängt zum einen damit zusammen, dass inflationäre Modelle einen phänomenologischen Charakter haben; denn über die frühen Materiefelder ist nichts bekannt. Man beschränkt sich deshalb auf Aussagen, die von speziellen Feldern unabhängig sind. Aber die wichtigen Fragen, was treibt die Inflation an und woher kommt die dunkle Energie, bleiben so unbeantwortet. Zum anderen stößt man bei maximalen Energien und Impulsen an Grenzen, die offensichtlich eine Quantisierung der Gravitation erfordern. Gäbe es eine Quantenfeldtheorie, welche die Gravitation mit einschließt, so könnte man erwarten, dass sich die Inflation von selbst ergibt, ohne dass man sie ad hoc einführen muss. Die Dimensionen, bei welchen die Quantisierung der Gravitation ins Spiel kommt, heißen Planck-Einheiten.

Als es Max Planck um 1900 klar geworden war, dass er mit „ h “ eine neue Naturkonstante gefunden hatte, versuchte er, aus h , c und G natürliche Einheiten der Länge, der Zeit und der Energie zu bilden. Man spricht deshalb noch heute bei folgenden Größen von den Planck-Einheiten:

$$\text{Plancklänge} \quad l_p = \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} = 1,61 \cdot 10^{-33} \text{ cm} \quad (10.1)$$

$$\text{Planckzeit} \quad t_p = \left(\frac{G\hbar}{c^5} \right)^{1/2} = 5,38 \cdot 10^{-44} \text{ s} \quad (10.2)$$

$$\text{Planckmasse} \quad m_p = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 2,18 \cdot 10^{-5} \text{ g} \quad (10.3)$$

Aus der Planckmasse kann man die Planckenergie $E_p = m_p c^2 = 1,22 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$, die Plancktemperatur $T_p = \frac{m_p c^2}{k_B} = 1,41 \cdot 10^{32} \text{ K}$ und mit der Plancklänge die

Planckdichte $\rho_p = \frac{m_p}{l_p^3} = 5,2 \cdot 10^{93} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ bilden. Planck hat die Deutung dieser

Größen nicht weiter verfolgt, weil sie viele Größenordnungen jenseits der physikalisch gebräuchlichen und messbaren Einheiten lagen, was sich bis heute

nicht geändert hat. Man geht jedoch heute davon aus, dass die Planck-Einheiten den Bereich der Quantengravitation bezeichnen. Im Bereich von 10^{-33} cm und 10^{-43} s sind Quantenfluktuationen der Metrik so stark, dass Angaben über die klassische Raumzeit nicht mehr gemacht werden können.

Das Standardmodell der Kosmologie ist eine klassische Kontinuumstheorie, die bei $t = 0$ für den Reziprokwert des Skalenparameters a^{-1} und für die Dichte $\rho \propto a^{-3}$ eine Singularität aufweist, welche sich im Rahmen der ART nicht beseitigen lässt, wie von S.W. Hawking und Penrose 1970 und S.W. Hawking und G.F.R. Ellis 1973 gezeigt wurde. Wenn also der Skalenparameter verschwindet $a(t) \rightarrow 0$, divergiert die Materiedichte $\rho(t) \rightarrow \infty$ und die kinetische Energiedichte $T(t) \rightarrow \infty$. Inzwischen gibt es Ansätze zu einer Quantengravitation in der String Theorie und in der „Loop Quantum Theory“.

10.2. Wege zur Quantengravitation. Stringtheorie.

Den Weg zu einer umfassenden Theorie der Materie, welche die Quantengravitation einschließt, wird von Vertretern der Stringtheorie (oder M-Theorie) eingeschlagen. Diese Theorie besetzt heute die Stelle einer „Grand Unified Theory“. Stringtheorie (oder M-Theorie) arbeitet in $(10 + 1)$ Dimensionen. Ihre Elementaranregungen sind nicht punktförmig, wie in der Standardtheorie der Elementarteilchen, sondern linienförmig oder haben auch höhere Dimension. Die Stringtheorie schließt Supersymmetrie und Gravitation ein. In einem kurzen Review-Artikel von Tom Banks von 1999 wird gezeigt, wie Eichfelder die Supersymmetrie (bei welcher Bosonen und Fermionen immer als Paare mit gleicher Masse auftreten) brechen können und dabei auch Inflatonfelder entstehen. Aber eine konsistente Baryonsynthese fehlt noch. Die erreichten Energien liegen nur wenig über der Energie der Nukleosynthese. Drei Jahre später stellen Paul J. Steinhardt und Neil Turok (2002) ein Modell auf der Grundlage der M-Theorie vor, das die Autoren „ekpyrotisches“ Modell nennen und das einen zyklischen Kosmos beschreibt, der weitgehend die Parameter des Standardmodells annimmt. In dem Modell von Steinhardt und Turok werden 6 Dimensionen kompaktifiziert. Es bleiben eine Zeitdimension und 4 Raumdimensionen übrig, die von der Gravitation beherrscht werden. Der 4d-Raum ist begrenzt durch zwei 3d-Hyperflächen oder „Branes“. Die Materie unserer sichtbaren Welt bewegt sich auf einem dieser „Branes“. Die Materie der anderen (unsichtbaren) „Brane“ wechselwirkt mit der sichtbaren Welt nur über die Gravitation und wirkt als dunkle Materie. Auch in diesem Modell kommt ein skalares Feld vor. Es bestimmt den Abstand zwischen den Branen. Das Potential $V(\phi)$ beschreibt die Kraft zwischen den Branen, die sie zur Kollision und zum Auseinanderdriften bringt. Die Beobachtungen können gegenwärtig nicht zwischen beiden Modellen, dem der klassischen Inflation mit einem einmaligen

Anfang und dem zyklischen Braneworld-Model, unterscheiden. Nach dem zyklischen Model treten nur Dichtefluktationen aber keine Gravitationswellen auf, während nach der klassischen Inflation beides auftreten sollte. Allerdings treten in dem ekpyrotischen Modell auch eine Reihe neuer Schwierigkeiten auf, die nicht ausreichend behoben wurden. Für eine experimentelle Prüfung reichen die Empfindlichkeiten noch nicht aus. Bisher sind keine Anzeichen für Gravitationswellen gefunden worden (sehr kleine BB-Polarisation des CMB), aber die gegenwärtig erreichte Empfindlichkeit reicht bei weiten noch nicht zu einer definitiven Unterscheidung aus. Die Autoren betonen, dass zu ihrem Modell keine zusätzlichen Annahmen nötig seien. Mir ist dabei nicht klar, wie viel Freiheit oder Willkür die Stringtheorie in ihrer gegenwärtigen Gestalt bei der Suche nach Lösungen zulässt. Haben wir es hier nur mit einer von vielen möglichen Lösungen zu tun? Wenn das so wäre, dann müsste man erklären, warum unser Kosmos gerade diese eine Lösung angenommen hat.

In den letzten Jahren wurde besonders kritisiert, dass die Stringtheorie keinen eindeutigen Teilchengrundzustand (in der Quantenfeldtheorie „Vakuum“ genannt) angeben kann. Auf die Spitze getrieben lautet das Argument: Die Stringtheorie lässt wenigstens 10^{500} Grundzustände oder Vakua zu. Leonard Susskind hat dieses Argument zugunsten einer neuen Deutung des Anfangs benutzt. Dieser Deutung liegt die Idee zugrunde, dass die Größe der fundamentalen Wechselwirkungen, die wir messen und die als elementare Parameter in die Physik eingehen, zufällig ist. Es sind Welten denkbar, in welchen völlig andere Größen verwirklicht sind. Das ist auch nach Andrei Lindes chaotischer Inflation der Fall. In diesen Welten würde sehr wahrscheinlich kein Leben entwickeln können. Das Modell der Stringtheorie benutzt den Begriff „landscape“ (Landschaft). Damit ist die Hyperfläche eines Potentials $V(\phi_j)$ gemeint, das von Modulfeldern ϕ_j aufgespannt wird. Es handelt sich in gewissem Sinne um multidimensionale Verallgemeinerungen von Potentialen wie sie in Fig. 8.4, 8.6 bis 8.8 skizziert wurden. Der Zustand des frühen Kosmos landet durch einen zufälligen Prozess in einem Minimum der Hyperfläche und definiert damit seine fundamentalen Parameter. Daraus zieht Susskind folgenden philosophischen Schluss: Das anthropische Argument „die Welt ist so, weil es uns (Menschen) gibt“, ist zu bejahen. Aber hier hat sich eben nur zufällig eine von vielen 10^{500} Möglichkeiten verwirklicht. Die Annahme, das Universum hätte sich nach einem Plan entwickelt oder es gäbe einen Sinn in dieser Entwicklung (the idea of intelligent design), würde demnach jeder Grundlage entbehren.

Hier wird offensichtlich aus der misslichen Lage der Kosmologie (und vor allem der Stringtheorie) eine Tugend gemacht. Der Verdacht besteht, dass das Spiel mit „landscapes“ doch eher ein Übergangsstadium einer unvollständigen oder unreifen Theorie beschreibt, weniger dagegen den Weg zu einem neuen Verständnis des kosmischen Anfangs. Aber was ist mit dem Ersatz der alten Metaphysik durch eine spekulative physikalische Theorie denn gewonnen? Warum nicht zugeben, dass es in zentralen Punkten (noch) kein verlässliches

Wissen gibt und dass wir uns damit gegenwärtig schwer tun? Auch die wissenschaftliche Feststellung dass der Kosmos mit einem Zufalls beginnt, lässt Raum für eine Suche nach Sinn.

10.3. Wege zur Quantengravitation. „Loop Quantum Gravity“.

Bei dem Projekt „Loop Quantum Gravity“ (LQG) hat man einen anderen Weg eingeschlagen. LQG arbeitet wie das kosmologische Standardmodell in $3 + 1$ Dimensionen. In die Jahrzehnte alten frustrierenden Versuche einer Quantisierung der Einsteinschen Theorie hat 1986 Abhay Ashtekar eine neue Idee eingebracht. Er führte neue kanonische Variable ein. Die Ashtekar-Variablen sind einerseits Konnektionen, also Größen des Paralleltransports und andererseits ein Vektorfeld, das sich als Dreibein beschreiben lässt (Vector Triade), die zueinander kanonisch konjugiert sind. Da sich diese Größen aber noch nicht ohne weiteres quantisieren lassen, bildet man aus dem Fluss des Vektorfelds durch eine Fläche einen Strom. Ausserdem wird eine Holonomie, d.h. ein Loopintegral über die Konnektionen gebildet (ähnlich definiert wie in Gl. A.5.9). Dazu kommen Randbedingungen, wie die Hamiltonsche Randbedingung (hamiltonian constraint) und die Bedingung der Invarianz gegenüber Diffeomorphismus, d.h. Unabhängigkeit von irgendeiner Hintergrundmetrik. Die Details sind mathematisch kompliziert und müssen in der Originalliteratur nachgelesen werden. Es können Flächen- und Volumenoperatoren gebildet werden. In den Eigenwerten treten halbzahlige Quantenzahlen $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ wie beim atomaren Drehimpuls auf. Die elementaren Einheiten haben die Größenordnung l_p^2 und l_p^3 . Wir geben hier als Beispiel nur die Eigenwerte des Volumenoperators an

$$V_j = (\gamma l_p^2)^{3/2} \sqrt{\frac{1}{27} j(j + \frac{1}{2})(j + 1)} \quad (10.4)$$

γ ist der Barbero-Immirzi-Parameter, der sich nicht von selbst aus der Theorie ergibt. In älteren Versuchen der kanonischen Quantisierung der Gravitation treten z.B. in der Wheeler-DeWitt-Gleichung nur Operatoren mit kontinuierlichen Eigenwertspektren auf, d.h. es gibt keine diskreten Eigenwerte wie in der LQG. Die Eigenzustände der LQG-Operatoren sind Spinnetzwerke. Die Verbindungslinien der Knotenpunkte sind Darstellungen der Symmetriegruppe $SU(2)$, daher der Name „Spinnetzwerke“. Ihre geometrische Bedeutung kann dual interpretiert werden. Knoten, in welchen die Spins enden, sind nulldimensionale Elemente und entsprechen einen $(3 - 0)$ -dimensionalen Volumenelement. Linien sind eindimensionale Gebilde und entsprechen einem $(3 - 1)$ -dimensionalen Flächenelement. Auf diese Weise kann man das

Spinnetzwerk interpretieren und sich einen Raum aus elementaren Raum- und Flächen- Elementen wie mit einem Baukasten aufgebaut denken.

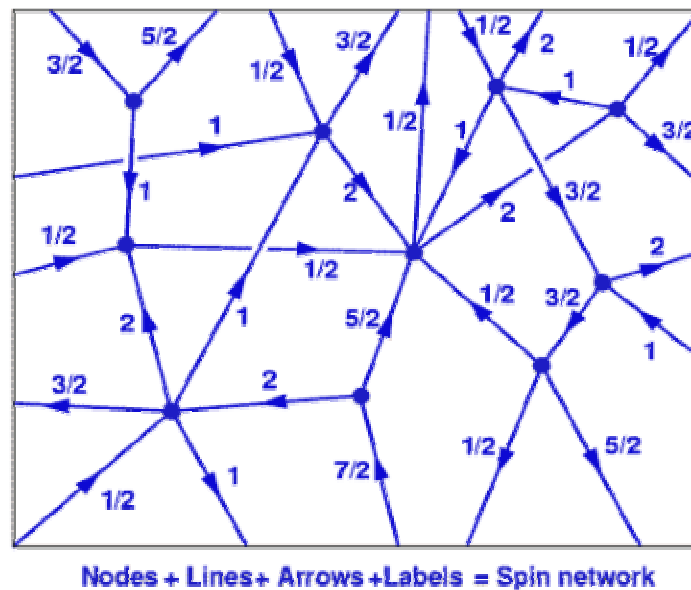


Fig. 10.1 Schema eines Spin-Netzwerks (hier in der Fläche dargestellt). Es besteht aus Linien, Knoten und gerichteten Strecken (s. Pfeile), die mit einer Zahl j bezeichnet sind (Bild aus Einstein-online des AEI, Potsdam).

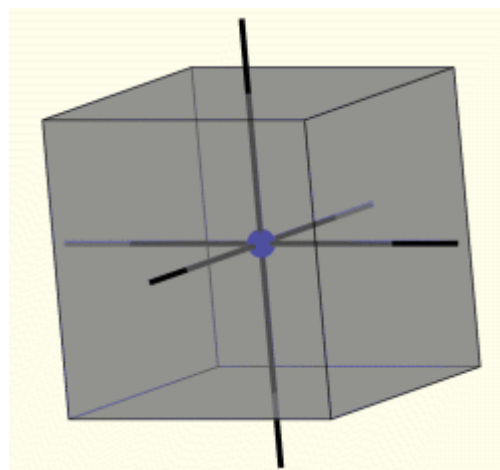


Fig. 10.2. Symbolische Darstellung der Dualität: Dem Punkt in der Mitte des Würfels ist das Volumen, einer Linie ist die darauf senkrecht stehende Fläche zugeordnet (Bild aus Einstein-online des AEI, Potsdam).

Kosmologische Anwendungen der LQG wurden in den letzten Jahren von Martin Bojowald entwickelt. Aus dem Hamiltonoperator erhält man eine Differenzgleichung für die Volumina. Diese Gleichung ist eine exakte Lösung und auch für kleine Volumina korrekt. Sie steht anstelle der Friedmangleichung. Für große Volumina geht sie in eine effektive Friedmangleichung über.

Was wird aus der Singularität von $\rho \propto a^{-3}$? Es gelingt, Eigenwerte des Operators $(\hat{a}^{-3})_{\mu}^{j,l}$ auszurechnen. Für den komplizierten Ausdruck lässt sich eine Näherung für j angeben

$$(\hat{a}^{-3})_{\mu}^{j,l}(a) = a^{-3} p_l \left(\frac{a^2}{a_{\max}^2} \right)^{3/2-2l} \quad (10.5)$$

wobei

$$a_{\max}^2 = \gamma j l_p^2 / 3 \quad (10.6)$$

Für große Argumente

$$\frac{a^2}{a_p^2} \gg 1 \text{ wird } p_l \rightarrow 1, \quad (10.7)$$

für kleine Argumente

$$\frac{a^2}{a_p^2} \ll 1 \text{ wird } p_l \approx 3(l+1)^{-1} \left(\frac{a}{a_{\max}} \right)^{2-1} \quad (10.8)$$

Der Übergang zwischen beiden Gebieten liegt bei $\frac{a^2}{a_p^2} \approx 1$ wie Fig. 10.3 zeigt.

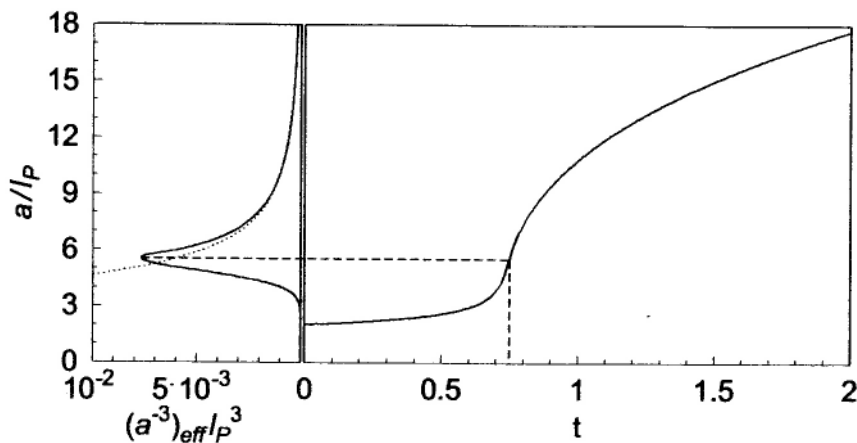


Fig. 10.3. Auf der linken Seite ist die effektive Dichte (horizontal) gegen den Skalenparameter (vertikal) aufgetragen. Die Dichte hat ein Maximum und geht aber bei $a \rightarrow 0$ ebenfalls gegen Null, während die klassische Dichte divergiert. Rechts ist der Skalenparameter (senkrecht) gegen die Zeit (waagrecht) aufgetragen (aus Martin Bojowald, *The Early Universe in Loop Quantum Cosmology*. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0503020>)

Um Bojowalds effektive Friedmanngleichung mit der klassischen Friedmanngleichung vergleichen zu können, schreiben wir diese zunächst (s. Gl. 5.2) etwas um

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + c^2 \frac{\kappa}{a^2 R_0^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon \quad (5.2)$$

in dem wir $\kappa/R_0^2 = k^2$ und $c=1$ setzen, außerdem multiplizieren wir beide Seiten mit a^3 . Wir erhalten so

$$3(\dot{a}^2 + k^2)a = 8\pi G \varepsilon a^3 \quad (10.9)$$

Bojowald behandelt die Fälle $k = 0, 1$. Für den Fall $k = 0$ setzt er für die Energiedichte entsprechend der Einsteingleichung mit einem homogenen skalaren Materiefeld

$$\varepsilon = \frac{1}{2} d(a)_{\text{eff}} p_\phi^2 + a^3 V(\phi) \quad (10.10)$$

wobei p_ϕ der Impuls des Feldes und $d(a)_{\text{eff}}$ der effektive Wert der Dichte ist. Für $a=0$ geht die Feldenergie gegen Null, undabhängig von der speziellen Gestalt von $V(\phi)$. Anstelle der klassischen Klein-Gordon-Gleichung 8.20 tritt folgender Ausdruck einer effektiven Gleichung

$$\ddot{\phi} = \dot{\phi} \dot{a} \frac{d \lg d(a)_{\text{eff}}}{da} - a^3 d(a)_{\text{eff}} V'(\phi) \quad (10.11)$$

Eine effektive Gleichung für \ddot{a} ergibt folgenden Ausdruck

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} [a^{-3} d(a)_{\text{eff}}^{-1} \dot{\phi}^2 \left(1 - \frac{1}{2} a \frac{d \ln(a^3 d(a)_{\text{eff}})}{da} \right) - V(\phi)] \quad (10.12)$$

Der klassische Dämpfungsterm $\dot{a}\dot{\phi}$ in Gl. 10.11 führt in der Inflation zum langsamen Abrollen. In der effektiven Klein-Gordon-Gleichung kann er wegen der logarithmischen Ableitung von a das Vorzeichen umkehren. Der Verlauf von $a(t)$ zeigt eine frühe und eine späte inflationäre Epoche ($\ddot{a} > 0$),

die jeweils bei einem Wendepunkt in $a(t)$ beendet werden ($\ddot{a} = 0$). Man sieht also, dass durch LQG das Problem des „graceful exits“ aus der Inflation gar nicht auftritt. Auch das Materiefeld zeigt ein vernünftiges Verhalten: $\phi(t)$ ist Null bei $a = 0$, wächst zunächst mit $a(t)$ an, fällt aber nach längerer Zeit ab und schwingt schließlich um einen Nullpunkt (s. Fig. 10.4 rechts unten).

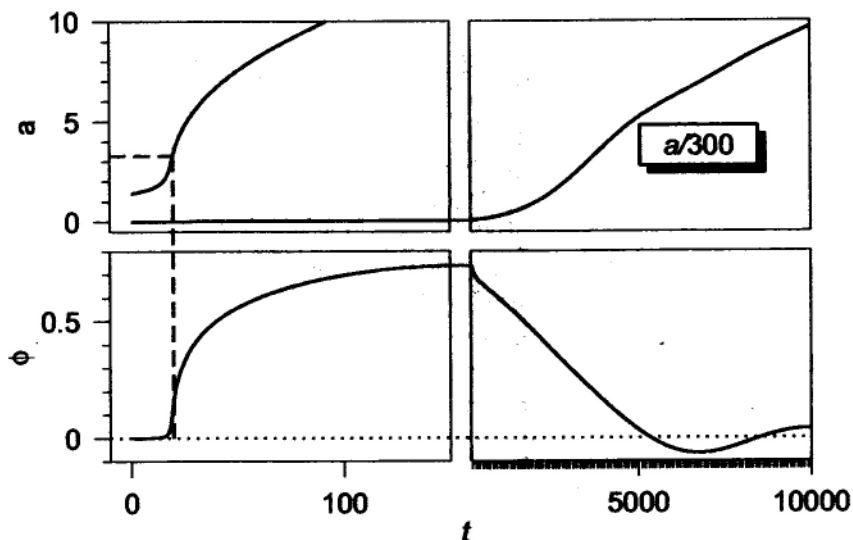


Fig. 10.4. zeigt den Verlauf von Skalenparameter und Feldfunktion mit der Zeit, links nach relativ kurzen Zeiten, rechts nach langen Zeiten. Es gibt zwei Epochen mit $\ddot{a} > 0$ (inflationäre Epochen). Die Inflation geht zu Ende, wo $a(t)$ einen Wendepunkt hat ($\ddot{a} = 0$). Der dargestellte Verlauf ist mehr qualitativ zu betrachten (aus Martin Bojowald, The Early Universe in Loop Quantum Cosmology. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0503020>)

Die Zeit $t = 0$ erscheint nicht besonders ausgezeichnet. Nur die Zeitrichtung muss vorgegeben sein, die Zeitskala lässt sich auch zu negativen Werten erweitern. Dadurch lässt sich untersuchen, was aus der klassischen Singularität werden kann. Die Ausdrücke Gl. 10.9 – 10.12 lassen auch ein Zusammensturz auf ein minimales Volumen mit Wiederanstieg zu. Dazu ist nur nötig, dass $\dot{a} = 0$, $\ddot{a} > 0$ wird, was allerdings klassisch ausgeschlossen ist.

Abschließend ist zu sagen, dass LQG, die mit dem eher bescheidenen Anspruch auftritt, sich auf die Quantisierung der Gravitation zu beschränken, beachtliche Erfolge vorweisen kann. Sie kann die Singularität bei $a(t) = 0$ beseitigen, es treten inflationäre Phasen in $a(t)$ auf, ohne dass spezielle Annahmen über das Potential des Materiefelds $V(\phi)$ gemacht werden müssen. Die inflationäre Phase schließt von selbst ab, es gibt kein „graceful exit“-Problem. Schließlich nimmt das Materiefeld einen vernünftigen Verlauf an, ohne dass besondere Annahmen gemacht werden müssen. Dennoch bleiben Fragen offen. Das Materiefeld ist ein

klassisches Feld. Wie daraus die uns bekannten Felder werden bleibt weiterhin offen. Die Frage nach der dunklen Energie könnte vielleicht mit Hilfe der LQG einer Lösung näher gebracht werden. Dennoch ist auch diese Frage noch völlig offen. Das Problem der Anfangsbedingungen vereinfacht sich, dennoch bleibt reichlich Spielraum (z.B. in der Annahme von j), verschiedene Möglichkeiten auszuprobieren.

10.4. Immerwährende Inflation („Eternal Inflation“)

Wir kehren wieder zu den Modellen zurück, welche Effekte der Quantengravitation nicht berücksichtigen. Man kann diese Effekte ausblenden, wenn man sich weit genug von den Planckgrößen entfernt hält. Linde sieht jedoch kein prinzipielles Problem darin, die Energiedichte des skalaren Feldes gleich einer Planckeinheit zu setzen. Die typischen Anfangsbedingungen wären dann nach Linde in Planckeinheiten (die Energiedichte hat die Dimension $M_p^4 = 1$)

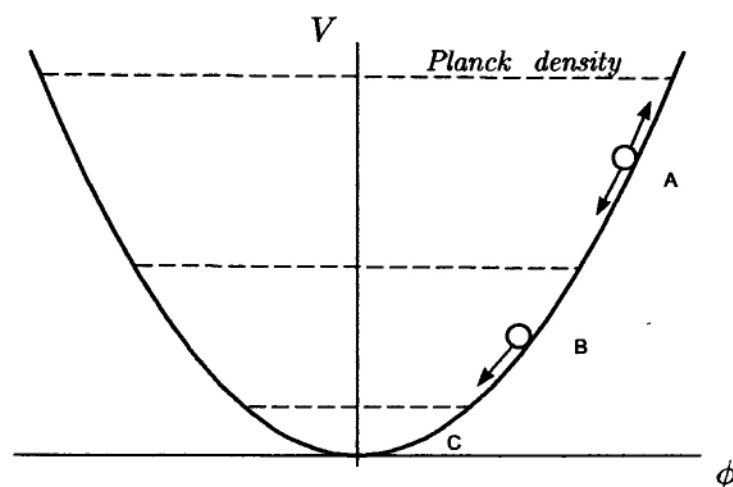


Fig. 10.5. Verhalten der potentiellen Energiedichte des skalaren Feldes $V(\phi)$ nach A. Linde. Inflation eines betrachteten Raumbereichs setzt ein, wenn sich eine besonders große Fluktuation von $V(\phi)$ ereignet. Dabei sind 3 Bereiche zu unterscheiden

A: $mM_p^3 < V(\phi) < M_p^4$ Quantenfluktuationen der Raumzeit sind klein aber Quantenfluktuationen des skalaren Feldes ϕ können groß sein

B: $m^2 M_p^2 < V(\phi) < mM_p^3$ Fluktuationen des skalaren Feldes ϕ sind klein. Die Feldamplitude kriecht oder rollt langsam gegen Null

C: das skalare Feld ϕ oszilliert und erzeugt dabei Paare von Elementarteilchen mit großer kinetischer Energie. Das Universum wird heiß.

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \approx 1$$

und

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \approx \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \approx V(\phi) \approx O(1)$$

Inflation setzt ein, wenn in einer betrachteten Domäne die potentielle Energiedichte größer ist als die kinetische und die Gradientenenergie, d.h. es ist

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 < V(\phi)$$

Fig. 10.5. zeigt, unter welchen Bedingungen Inflation bei $V(\phi) \leq M_p^4$ entstehen kann. Wir betrachten jetzt den Prozess sich wiederholender Inflationen. Das Feld sei anfangs in der betrachteten Domäne nahezu konstant und homogen, besitzt aber irgendwelche beliebigen Werte in den Nachbardomänen.

In der betrachteten Domäne wächst das Volumen V während der Zeit $\Delta t = H^{-1}$ um

$$\delta V = \left(e^{\Delta t/H}\right)^3 = e^3 \approx 20 \quad (10.8)$$

Im Vergleich zum Anfangsvolumen sind es 20 Domänen oder 20 Miniuniversen („Pocket Universes“), wobei jedes einen Radius cH hat. Man beachte, dass die inflationäre Expansion schneller als Lichtgeschwindigkeit verläuft. Da aber Signale und kausale Prozesse nur mit Lichtgeschwindigkeit ablaufen können, ist jedes Miniuniversum kausal von seinen Nachbarn getrennt und kann von diesen nicht beeinflusst werden. Die Fluktuationen des Feldes führen dazu, dass in einem Bruchteil der Miniuniversen wieder Inflation einsetzt. Im folgenden Zeitintervall $\Delta t = H^{-1}$ hat sich das Volumen gegenüber dem Beginn um einen Faktor 100 vergrößert. Jedes Miniuniversum hat wieder einen etwa konstanten Wert des Feldes ϕ , das sich aber wegen der Fluktuationen um einen Betrag $\delta\phi_i$ vom dem der Nachbarn unterscheidet. In einem Bruchteil der Miniuniversen mag ϕ durch eine entsprechend große Fluktuation $\delta\phi$ groß genug geworden sein, auf dass es wieder zu einer Inflation kommt. Man kann diese Iteration weiter fortführen und kommt so zu dem Schluß, dass in diesem Modell Inflation endlos ist („eternal inflation“), dass sie möglicherweise keinen Anfang und sicher kein Ende hat und in jedem Zeitintervall eine fraktale Struktur von Miniuniversen hinterlässt. Man möchte annehmen, dass sich in diesen Prozessen ein stationärer Zustand heraus bildet. Aber dazu müsste es eine Obergrenze für die Feldamplitude geben, was wieder eine Behandlung im Rahmen der Quantengravitation notwendig machen würde. In bisherigen Behandlungen des Problems konnte nicht gezeigt werden, dass „Eternal Inflation“ ohne Anfang ist.

Auf jeden Fall aber werden die Anfangsbedingungen, so wie die Wahrscheinlichkeit einer anfänglichen Inflation, irrelevant.

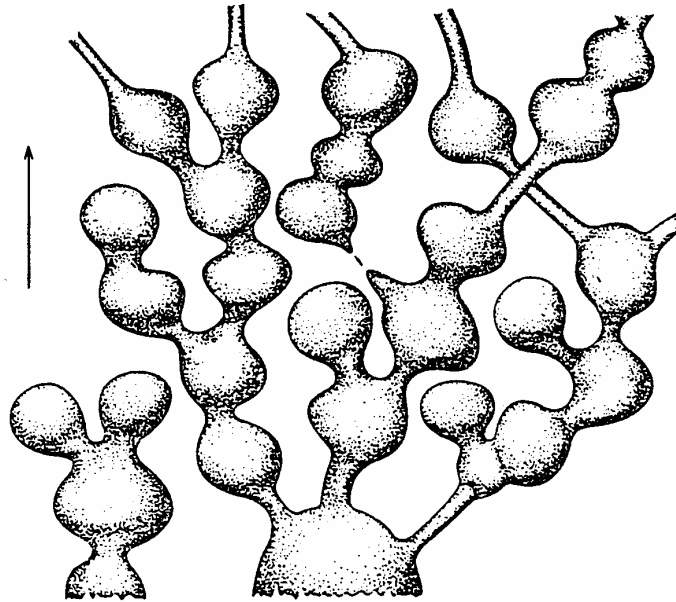


Fig. 10.6. Die Entstehung von Pocket-Universen bei immerwährender Inflation. Nach A. Linde: Elementarteilchen und inflationärer Kosmos. Spektrum Akad. Verl. 1993

Es ist wichtig, noch einmal hervorzuheben, dass Lindes Model nur in anfänglich sehr kleinen Bereichen von der Größe der Plancklänge Homogenität voraussetzt. Inflation plus Expansion im Standardmodel haben bis zur Gegenwart aus einem winzigen Bereich ein gewaltiges Universum gemacht, von dem unser sichtbarer Kosmos mit einer Ausdehnung von einigen 10^{10} Lichtjahren nur ein kleiner Teil ist. Es ist danach möglich, dass ständig andere, uns unzugängliche und kausal unabhängige Bereiche, in welchen eine genügend große Fluktuation von $V(\phi)$ entstand, selbst wieder zu einer inflationären Expansion ansetzen. In diesem Bild (chaotic inflation) erkennt man keinen Anfang aber auch kein Ende dieser Entwicklung.

Eine gewisse Rolle spielen Versuche, Modelle mit mehr als einem Feld anzusetzen. Solche Versuche mögen eine gewisse Berechtigung haben, Inflation in Zusammenhang mit „Supergravity“ und Stringtheorie zu untersuchen. Die experimentellen Daten insbesondere von WMAP scheinen eher die einfachsten Modelle zu unterstützen. Zum anderen muss man auch sehen, dass ein Modell an Wert einbüßt, je mehr Parameter zur Anpassung an empirische nötig sind.

10.5. Unser spezieller Kosmos und das anthropische Prinzip.

Wenn der inflationäre Prozeß mit einer Symmetriebrechung verbunden ist, wie es in der „neuen Inflation“ gefordert wird, dann wird sich das Inflatonfeld von einem Punkt hoher Symmetrie des Potentials, wo es eine Zeit lang verharrt, in ein neues Minimum mit gebrochener Symmetrie bewegen. Im allgemeinen wird dieses Potential sehr kompliziert sein und Punkte hoher Symmetrie so wie mehrere Minima mit niedriger Symmetrie enthalten. Allgemeine Theorien wie etwa die Stringtheorie lassen viele mögliche Lösungen zu. Nimmt man diese Ergebnisse ernst, dann folgt daraus, dass die kosmische Entwicklung am Anfang keineswegs eindeutig war, dass es viele mögliche Universen geben könnte und dass unser Universum mit den Wechselwirkungen der „vier Kräfte“ eine durchaus spezielle Kombination ist. Gedankenexperimente, in welchen man versuchte die Stärke der Wechselwirkungen zu ändern, um herauszufinden, wie die kosmische Evolution mit anderen Parametern verlaufen wäre, haben gezeigt, dass wir in einer ziemlich einzigartigen Welt leben. Aber warum ist sie so wie sie ist? Im „schwachen anthropischen Prinzip“ sagt man, die Welt ist so wie sie ist, weil wir da sind, d.h. kosmische Evolution verlief so, dass intelligentes Leben möglich wurde. Das anthropische Prinzip in seiner starken Form, behauptet, dass der Kosmos so gestaltet sein muss, dass intelligente Beobachter möglich sind. Der Gläubige wird darin das Walten eines göttlichen Willens sehen, der die Welt so geschaffen hat, um dem Menschen, der Krone der Schöpfung, ein Habitat zu geben. Vom Standpunkt der Naturwissenschaft ist dagegen nichts einzuwenden. Naturwissenschaft und Religion bewegen sich auf verschiedenen Ebenen. Der Naturwissenschaftler stellt keine Sinnfragen. Stattdessen wird er zunächst einmal in dieser Einzigartigkeit einen Auswahleffekt sehen: Der Kosmos ist so wie er ist, weil wir da sind. Eine Welt mit abweichenden Naturkonstanten hätte kein Leben und damit auch keinen Menschen hervorgebracht. Das schwache anthropische Prinzip ist eigentlich trivial oder ein Zirkelschluß. Die starke Form könnte zusammen mit der Vielwelten-Interpretation der Quantentheorie von Bedeutung sein. Die kosmische Evolution kann als ein historischer Prozeß angesehen werden, in welchen der Mensch eingebunden ist und aus dem er sich nicht befreien kann. Für die Wissenschaft bleibt zu bedenken: Um das Universum zu verstehen muss die Möglichkeit des organischen Lebens, ja sogar des höher organisierten Lebens mit gedacht werden.

10.6. Wie geht es nach der Inflation weiter?

Nach dem Ende der inflationären Epoche bleibt das Inflatonfeld in einem hoch angeregten Zustand zurück. Man kann nun in die Lagrangedichte Gl. 8.23 noch weitere Felder einbauen, welche mit dem Inflatonfeld wechselwirken, seine Energie abbauen und auf diese Weise Teilchenpaare erzeugen. Je nach dem

Ansatz kann die Teilchenerzeugung langsam (bei Fermionen) oder explosionsartig (bei Bosonen) erfolgen. Die kinetische Energie der Teilchen sorgt für eine hohe Temperatur. Neben der großen Vereinigung verlegt man auch die Brechung der Supersymmetrie (Fermionen und Bosonen treten paarweise auf) zu sehr hohen Energien. Die Supersymmetrie kann vielleicht das Problem der dunklen Energie lösen helfen, weil sich in diesen Theorien Vakuumenergien kompensieren lassen. Da aber bisher keine supersymmetrischen Partner gefunden wurden, muß man annehmen, daß sie schon im frühen Kosmos in leichtere Teilchen zerfallen sind. Die Frage, ob sich die dunkle Materie durch ein supersymmetrisches Teilchen erklären läßt, ist noch völlig offen.

Bei der Zuordnung von Temperatur und Zeit ist auf die Freiheitsgrade der Teilchen zu achten. Die Gl. 6.3

$$\varepsilon_r = u = a_B T^4$$

gilt für Photonen die zwei Freiheitsgrade (Polarisationen) besitzen. Man kann die Formel verallgemeinern, indem man alle relativistischen Teilchen mit der effektiven Zahl der Freiheitsgrade berücksichtigt

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} g_* a_B T^4 \quad (10.8)$$

wobei

$$g_* = \sum_{\text{Bosonene}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \cdot \sum_{\text{Fermionen}} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^4 \quad (10.9)$$

Es ist berücksichtigt worden, daß die Fermionen und Bosonen verschiedene Temperaturen haben können. Tatsächlich steigt g_* oberhalb 100 MeV kräftig an.

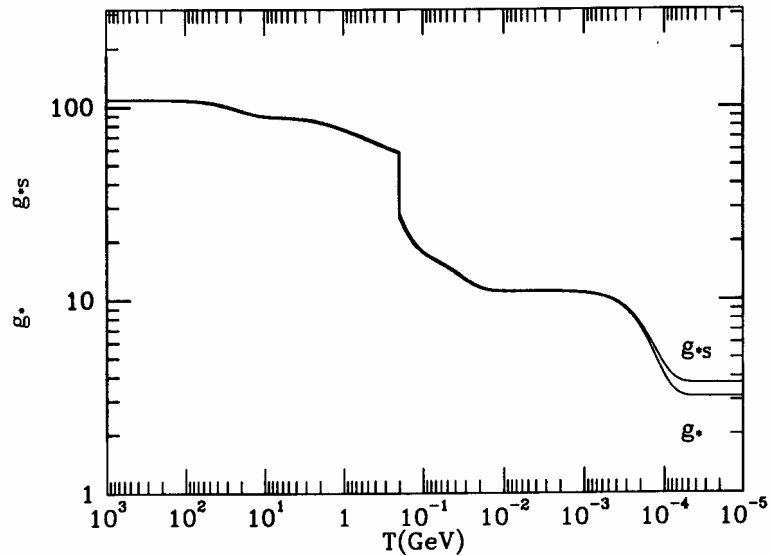


Fig. 10.4. die Evolution der Freiheitsgrade relativistischer Teilchen in der $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Theorie. Nach E.W. Kolb & M.S. Turner: *The Early Universe*. Addison-Wesley Pub. Comp. 1990

Bei kleinen Energien sind neben den Photonen auch Elektronen-Positronen-Paare und vor allem Neutrinos berücksichtigt worden. Wenn $k_B T < 1 \text{ MeV}$ ist, ist $g_* = 3,36$. Dabei ist $T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma$. Die Energiedichte der CMB ist bei $T_0 = 2,7325 \text{ K}$

$u(T_0) = (4,19 \cdot 10^{-13} \pm 0,01) \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3} = (4,19 \cdot 10^{-14} \pm 0,01) \text{ Joule} \cdot \text{m}^{-3}$. Daraus ergibt sich für Temperaturen $T > 10^{10} \text{ K}$

$$u(T) = \frac{1}{2} g_* u(T_0) \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \quad (10.10)$$

Es ist außerdem

$$\frac{g_*}{2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 = \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 = \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 \quad (10.11)$$

und

$$t = \left(\frac{2}{g_*}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \cdot t_0 \quad (10.12)$$

Ohne Berücksichtigung von g_* ergeben sich $t = 2,3 \text{ s}$ für $T = 10^{10} \text{ K}$ (s. Gl. 7.3). In ähnlicher Weise kann man die Hubblefunktion \dot{a}/a für den frühen Kosmos ausrechnen

$$H(t) = H_0 \Omega_r^{1/2} \left(\frac{g_*}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 = 1,61 \cdot 10^{-21} \left(\frac{g_*}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \text{ s}^{-1} \quad (10.13)$$

Hier sind folgende Werte eingesetzt worden

$$H_0 = 3,24 \cdot 10^{-18} \cdot h \text{ s}^{-1} = 2,30 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

$$\Omega_r = 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ und } \Omega_r^{1/2} = 0,70 \cdot 10^{-3}$$

	1. Generation	2. Generation	3. Generation
Q = +2/3	u (up)	c (charmed)	t (top)
Q = -1/3	d (down)	s (strange)	b (bottom)
Spin immer 1/2			
„Farbe“ : blau, gelb, rot			

Tabelle 10.1. Liste der Quarks

Der plötzliche Anstieg von g bei 150 MeV liegt in der Nähe der Pionenmassen, welche die Werte $m(\pi^\pm) = 140 \text{ MeV}/c^2$ und $m(\pi^0) = 135 \text{ MeV}/c^2$ haben und den Spin $S = 0$ besitzen; das entspricht 3 Freiheitsgraden. Bei Temperaturen $T > 150 \text{ MeV}/k_B$ und den entsprechenden Dichten stellt sich ein Quark-Gluon-Plasma ein, wobei das „Confinement“ der Quarks aufgebrochen und diese eine asymptotische Freiheit erwerben. Die Zahl der Freiheitsgrade ändert sich drastisch. Die Quarks haben 3 Flavours, 3 Farben und 2 Spins, dazu kommt noch einmal die gleiche Zahl bei den Antiquarks. Schließlich gibt es 8 Gluon-Arten mit 2 verschiedenen Helizitäten, macht alles zusammen 52 Freiheitsgrade. Dieses Bild ist zunächst ein Ergebnis der Theorie. Es wird inzwischen mehr und mehr durch Schwerionenexperimente bestätigt, welche erste Anzeichen für das Auftreten des Quark-Gluonen-Plasmas zeigen. Bei $T < 150 \text{ MeV}/c^2$ sind die Quarks gebunden, so liegen z.B. in den Pionen Quark-Antiquark-Paare vor, mit Massen $m(\pi^\pm) = 139,6 \text{ MeV}/c^2$ und $m(\pi^0) = 136 \text{ MeV}/c^2$ und Zusammensetzung

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle \quad |\pi^-\rangle = |\bar{u}d\rangle \quad |\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |d\bar{d} - u\bar{u}\rangle \quad (10.14)$$

Dabei sind setzen sich die Zustände noch aus Summen über die Farben bzw. Antifarben zusammen, die in der starken Wechselwirkung das Gegenstück zu den Ladungen in der elektromagnetischen Theorie bilden. In den Nukleonen, Proton und Neutron, liegen jeweils 3 Quarks gebunden vor

$$|p\rangle = |uud\rangle \quad |n\rangle = |udd\rangle \quad (10.15)$$

Das entsprechende gilt für die Antinukleonen. Die Pionen zerfallen nach dem Schema

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad \pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{und} \quad \pi^0 = \gamma + \gamma \quad (10.16)$$

wobei der zweite Prozeß nur mit einer Wahrscheinlichkeit 1/8000 neben dem ersten auftritt. Die Myonen sind Leptonen und zerfallen in Elektronen und Neutrinos

$$\mu^+ = e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad \text{und} \quad \mu^- = e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (10.17)$$

Baryonen und Antibaryonen können in verschiedenen Prozessen miteinander reagieren, die hier nicht weiter verfolgt werden sollen. Wichtig ist für die Kosmologie, daß diese Reaktionen auf Grund einer Symmetrie-Brechung zwischen Materie und Antimaterie am Ende nur Materie, Neutrinos, Elektronen und Photonen übrig lassen.

Tab. 3.1 GUT-Kosmologie (aus [Gro89,90])

	Zeit t [s]	Energie $E = kT$ [GeV]	Tempe- ratur T [K]	„Durchmesser“ des Universums R [cm]
Planck-Zeit t_{P1}	10^{-44}	10^{19}	10^{32}	10^{-3}
GUT $SU(5)$ -Brechung, M_X	10^{-36}	10^{15}	10^{28}	10
$SU(2)_L \otimes U(1)$ -Brechung, M_W	10^{-10}	10^2	10^{15}	10^{14}
Quark-Confinement, $p\bar{p}$ -Zerstrahlung	10^{-6}	1	10^{13}	10^{16}
ν entkoppeln, e^+e^- -Vernichtung	1	10^{-3}	10^{10}	10^{19}
Bildung leichter Kerne	10^2	10^{-4}	10^9	10^{20}
γ entkoppeln, Übergang des Strahlungskosmos in Materie- kosmos, Bildung von Atomen, Bildung von Sternen und Galaxien	10^{12} ($\approx 10^5$ a)	10^{-9}	10^4	10^{25}
heute, t_0	$\approx 5 \cdot 10^{17}$ ($\approx 2 \cdot 10^{10}$ a)	$3 \cdot 10^{-13}$	3	10^{28}

Tab. 10.2. Epochen der kosmischen Entwicklung nach K. Grotz und H.V. Klapdor: Die schwache Wechselwirkung in Kern-, Teilchen- und Astrophysik. Teubner Verl. 1989

10.6. Zusammenfassung.

Mit den Anfangsbedingungen des Universums wird die „Planck-Epoche“ diskutiert. Neben einem knappen Überblick über die Versuche einer Quantisierung der Gravitation, wobei es bisher nur die Loop Quantum Gravity geschafft hat, eine konsistente Quantenkosmologie zu entwickeln, wird zu Vergleich noch einmal der Ansatz der chaotischen Inflation von A. Linde gegenüber gestellt, der ausdrücklich auf eine nähere Untersuchung der Planck-Epoche verzichtet. Die Folgerungen, wie „Eternal Inflation“ werden ebenso diskutiert wie der Beginn unseres Universums als Zufallsprozess. Nachdem am Ende der Inflation Teilchen entstanden sind, geht mit fortschreitender Expansion und Abkühlung die Entwicklung hin zu den uns heute bekannten Teilchen. Dabei ist die effektive Zahl der Freiheitsgrade als Funktion der Temperatur zu beachten.

10.7. Literatur

Robert H. Brandenberger : Inflationary Cosmology. Progress and Problems.
hep-ph/9910410

A. Ashtekar: Quantum Mechanics of Geometry. gr-qc/9901023

B. Rovelli : Loop Quantum Gravity. Living Reviews on Relativity. (1997)
<http://www.livingreviews.org/Articles>

T. Thiemann : Introduction to Modern Canonical General Relativity. gr-qc/0110034

Robert H. Brandenberger : Principles, Progress and Problems in Inflationary Cosmology. Astro-ph/0208103

A. H. Guth: Inflation and eternal inflation. Phys. Rep. 333/334 (2000) 555

A. Linde: Inflationary Cosmology. Phys. Rep. 333/334 (2000) 575

A. Guth: The Inflationary Universe. Addison Wesley Publ. Comp. 1997.

M. Gasperini: Birth of the universe in string cosmology. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9706037>

J. Khouri, P.J. Steinhardt, D. Waldram : Inflationary solutions in the brane world.. Phys. Rev. D 63 (2001) 103505

P.J. Steinhardt and N. Turok: A cyclic model of the universe. Science 296. 24 May 2002, p. 1436

M. Bojowald : Isotropic Loop Quantum Cosmology. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0202077>

M. Bojowald and K. Vandersloot: Loop Quantum Cosmology, Boundary Proposals, and Inflation. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/gr-qc/0303072>

Martin Bojowald, The Early Universe in Loop Quantum Cosmology. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0503020>

J.C. Baez: An Introduction to Spin Foam Models of BF Theory and Quantum Gravity. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9905087>

St. Hollands and R. Wald, An Alternative to Inflation. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0205058>

W.H. Kinney et al. WMAPping inflationary physics. hep-ph/0305130

J. Rosen : The anthropic principle. Am J. Physics April 1985 & May 1988

B. Kanitscheider : Das Anthropische Prinzip- ein neues Erklärungsschema der Physik? Physikalische Blätter 45 Nr. 12 (1989) 9

J.D. Barrow, F.J. Tipler : The anthropic cosmological principle. Oxford Univ. Press 1986