

## Anhang.

### A1. Helligkeiten, Größenklassen und Entfernungen

Die visuelle Helligkeit  $m_v$  eines Sterns ist ein physiologisches Maß und hängt logarithmisch von der Leuchtkraft  $L$  (Strahlungsleistung in Watt) ab

$$-m_v = \log L + C \quad (\text{A.1.1})$$

$m_v$  wird in Größenklassen gemessen und bezieht sich nur auf ein Fenster im sichtbaren Spektrum. Je schwächer ein Stern erscheint, um so höher ist seine Größenklasse. Integriert man über das ganze Sternspektrum, so erhält man die bolometrische Helligkeit  $m_{bol}$ , die meist benutzt wird, wenn die Leuchtkraft  $L$  aus der Helligkeit bestimmt werden soll. Die Differenz zwischen  $m_{bol}$  und  $m_v$  heißt bolometrische Korrektur (BC)

$$BC = m_{bol} - m_v \quad (\text{A.1.2})$$

Aus der Differenz der bolometrischen Helligkeiten läßt sich das Intensitätsverhältnis wie folgt bestimmen

$$m_2 - m_1 = 2,5 \cdot \log \frac{I_1}{I_2} \quad (\text{A.1.3})$$

(Der Index wurde hier der Einfachheit halber weggelassen). Wenn  $I_1 > I_2$  dann ist  $m_2 - m_1$  positiv. Befinden sich 2 Sterne in verschiedenen Entfernungen, hat man nach Gl. 1.1

$$\log \frac{I_1}{I_2} = \log \frac{L_1}{L_2} - 2 \cdot \log \frac{r_1}{r_2} \quad (\text{A.1.4})$$

Sind die Leuchtkräfte gleich aber die Entfernungen verschieden, dann erhält man für die Differenz der Größenklassen

$$m_1 - m_2 = 5 \cdot \log \frac{r_1}{r_2} \quad (\text{A.1.5})$$

Man denkt sich einen Stern aus der Entfernung  $r$  (pc) in eine Entfernung Standardentfernung von 10 pc gebracht. Seine Helligkeit in dieser Entfernung heißt absolute Helligkeit  $M$ . Es ist dann

$$m - M = 5 \cdot \log \left( \frac{r}{10 \text{ pc}} \right) = 5 \cdot \log r - 5 \quad (\text{A.1.6})$$

wobei  $r$  in pc gemessen wird.  $1pc = 3,0857 \cdot 10^{16} m = 3,2616 \text{Lichtjahre}$ . Der Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. A.1.6 heißt Entfernungsmodul. Wurde die Messung wie häufig in einem bestimmten Spektralgebiet gemacht, so muß dieses als Index angegeben werden. Seitdem die elektronische CCD-Platte die Photoplatte ersetzt hat, misst man  $I$  direkt, als Zahl detektierter Lichtquanten

$$I = j \cdot h\nu \quad (\text{A.1.7})$$

wobei  $j$  die Zahl der Photonen/ $m^2 \cdot s$  ist.

## A2. Hubble-Gesetz: aus Isotropie folgt Homogenität.

Die Geschwindigkeit unterliegt einer Dehnung (und eventuell einer Rotation) des Raumes

$$\vec{v} = \hat{\Sigma} \cdot \vec{r} + \hat{\Omega} \cdot \vec{r} \quad (\text{A.2.1})$$

Hier ist

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \hat{\Sigma} + \hat{\Omega} \quad (\text{A.2.2})$$

der Dehnungstensor der Geschwindigkeit, der sich in einen symmetrischen Teil (Dehnung und Scherung) und einen antisymmetrischen Teil (Rotation) zerlegen lässt. Die Beobachtungen geben keinen Hinweis auf eine globale Rotation. Deshalb setzen wir

$$\hat{\Omega} = 0 \quad (\text{A.2.3})$$

Wir denken uns nun den symmetrischen Teil auf Hauptachsen transformiert. Isotropie bedeutet dann

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = H_0 \quad (\text{A.2.4})$$

Was für einen Punkt gilt, muss bei einer globalen Eigenschaft für alle Punkte gelten. Also gilt auch Homogenität. Der umgekehrte Schluss (aus Homogenität auf Isotropie) lässt sich allerdings nicht ziehen.

### A3. Das Birkhoff-Theorem

Der amerikanische Mathematiker Georg David Birkhoff bewies 1923 im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie folgendes Theorem:

Für eine sphärisch symmetrische Massenverteilung haben die Einsteinschen Feldgleichungen eine eindeutige Lösung. Innerhalb eines Hohlraum, der frei von Materie ist und den Symmetrie-Punkt enthält, erhält man die Minkowski-Metrik, d.h. es gilt

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{A.3.1})$$

Damit lässt sich die relativistische Verallgemeinerung der Ableitung in Kap. 2, die im Rahmen der Newtonschen Physik gegeben wurde, angeben. In einem Loch, das in einer sphärischen Materieverteilung zentriert ist, trifft man auf eine „flache Raumzeit“, d.h. der Raum ist euklidisch. Unter dieser Voraussetzung wird das Ergebnis, das wir in Kap. 2 erhalten haben, als korrekt bestätigt.

### A4. Robertson-Walker-Metrik

Eine andere nützliche Form der Robertson-Walker-Metrik erhalten wir durch folgende Umformung, zunächst für die positiv gekrümmte Hyperfläche  $\mathcal{S}^3$

$$r = R \sin \chi \quad (\text{A4.1})$$

Dann wird

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (\text{A4.2})$$

Eine entsprechende Umformung für den negativ gekrümmten Raum  $\mathcal{H}^3$  lässt sich mit

$$r = R \sinh \chi \quad (\text{A4.3})$$

ausführen und führt auf

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (\text{A4.4})$$

$\mathcal{S}^3$  ist kompakt und hat ein endliches Volumen. Das Volumen von  $\mathcal{H}^3$  dagegen ist unbeschränkt. Man kann auch Gl. 3.20 verallgemeinern, indem man schreibt

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 [d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) [d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2]] \quad (\text{A4.5})$$

mit

$$\Sigma(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \kappa = +1 \\ \sinh \chi & \text{für } \kappa = -1 \\ \chi & \kappa = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4.6})$$

Wir wollen mit Gl. 3.18 noch eine Anwendung der Metrik geben. Nehmen wir an, der Raum habe eine positive Krümmung und wir beobachten eine Galaxie, deren Winkelausdehnung  $\delta = d\theta$  betrage. Ihre wirkliche räumliche Ausdehnung sei  $dl = ds$ . Wir halten dabei  $t$ ,  $\chi$  und  $\theta$  konstant. Mit Hilfe von Gl. 3.18 läßt sich dann  $dl$  aus  $d\theta$  bestimmen

$$d\theta = \frac{dl}{R \sin \chi} \quad (\text{A.4.7})$$

Nehmen wir weiter an, der Beobachter befinde sich im Pol der Hypersphäre. Die Winkelausdehnung erreicht ein Minimum bei  $\chi = \pi/2$ , d.h. dann wenn die Galaxie sich am Äquator der Hypersphäre befindet.  $d\theta$  divergiert bei  $\chi = \pi$  und das Bild der Galaxie überdeckt den ganzen Himmel, wenn sie sich als Antipode am gegenüberliegenden Pol befindet.

## A5. Wichtiges aus der Riemannschen Geometrie.

Die Riemannsche Geometrie befaßt sich mit n-dimensionalen Räumen, in welchen ein Längenelement gegeben ist durch Gl. 3.1

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\text{A5.1})$$

mit nicht verschwindender Determinante

$$g = \text{Det} |g_{\alpha\beta}| \quad (\text{A5.2})$$

Diese Räume heißen Riemannsche Räume oder Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Wir unterscheiden ko- und kontrvariate Vektoren und deren Differentiale

$$dx_\mu = (cdt, -dx, -dy, -dz) \quad (\text{A5.3})$$

bzw.

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz) \quad (\text{A5.4})$$

Zwischen der ko- und der kontravarianten Form des metrischen Tensors besteht die Beziehung

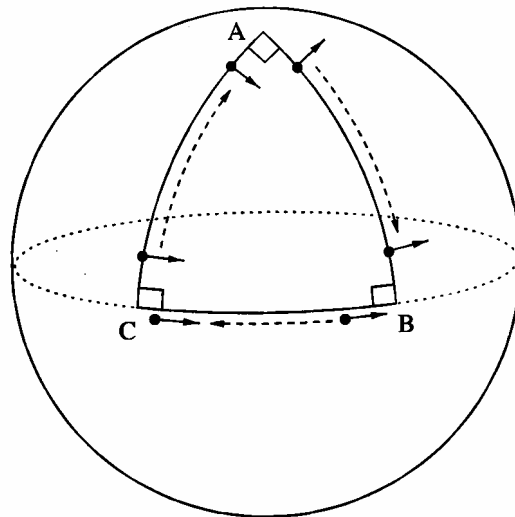
$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda \quad (\text{A5.6})$$

Der metrische Tensor hebt und senkt Indizes

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta \quad (\text{A5.7})$$

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta \quad (\text{A5.8})$$

Der parallele Transport eines Vektor auf einer geschlossenen Kurve in krummlinigen Koordinaten ändert i.a. die Richtung des Vektors im Gegensatz zum parallelen Transport in karthesischen Koordinaten. Die Änderung eines



**Fig. A5.1. Paralleltransport eines Vektors auf einer Kugelfläche. In diesem extremen Beispiel hat sich die Richtung des Vektors nach einem Umlauf im Dreieck um  $+90^\circ$  geändert.**

Vektors nach einem Umlauf durch eine geschlossene Schleife ist

$$\delta A^\mu = -\oint \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta \quad (\text{A5.9})$$

Die  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  heißen Konnektionen oder Christoffel-Symbole.

Anstelle der gewöhnlichen partiellen Differentiation tritt in der Riemannschen Geometrie die kovariante Differentiation. Man nimmt dabei die Änderung des Vektors an dem benachbarten Punkt  $A^{\mu}(x) \rightarrow A^{\mu}(x + \delta x)$  und zieht davon die Parallelverschiebung ab  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} A^{\alpha}$ . Im Gegensatz zur gewöhnlichen Differentiation steht hier der Index der Koordinaten, nach welcher differenziert wurde, hinter einem Semikolon

$$A^{\mu}_{;v} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^v} + \Gamma_{v\lambda}^{\mu} A^{\lambda} = A^{\mu}_{,v} + \Gamma_{v\lambda}^{\mu} A^{\lambda} \quad (\text{A.5.10})$$

Kurz gesagt berücksichtigt die kovariante Differentiation auch die Änderung des Bezugssystems in einem krummlinigen Koordinatensystem.

Ko- und kontravariante Form lassen sich wieder durch den metrischen Tensor ineinander überführen

$$A^{\beta}_{;\mu} = g^{\alpha\beta} A_{\beta;\mu} \quad \text{und} \quad A_{\beta;\mu} = g_{\alpha\beta} A^{\alpha}_{;\mu} \quad (\text{A.5.11})$$

Die Konnektionen gewinnt man aus den Komponenten des metrischen Tensors wie folgt

$$\Gamma_{v\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{v\lambda,\sigma}) \quad (\text{A5.12})$$

In torsionsfreier Geometrie sind folgende Komponenten gleich

$$\Gamma_{v\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\lambda v}^{\mu}$$

Aus Gl. A5.10 und A5.12 findet man, daß die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad \text{und} \quad g^{\mu\nu}_{;\lambda} = 0 \quad (\text{A5.13})$$

Bei der zweifachen kovarianten Ableitung kommt es auf die Reihenfolge des Differenzierens an. Insbesondere ist

$$A_{\mu;\nu;\lambda} - A_{\mu;\lambda;\nu} = A_{\sigma} \hat{R}^{\sigma}_{\mu\nu\lambda} \quad (\text{A5.14})$$

Hier ist  $\hat{R}_{\mu\nu\lambda}^{\sigma}$  der Riemannsche Krümmungs-Tensor. Zieht man den oberen Index nach unten

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} = g_{\sigma\rho} R_{\mu\nu\lambda}^{\rho} \quad (\text{A.5.15})$$

so gelten für den Riemann-Tensor folgende Symmetrie-Beziehungen

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} = -R_{\mu\sigma\nu\lambda} = -R_{\sigma\mu\lambda\nu} \quad (\text{A.5.16})$$

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\sigma\mu} \quad (\text{A.5.17})$$

Permutation der letzten 3 Indizes ergibt die Beziehung

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} + R_{\sigma\lambda\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.5.18})$$

Die sogenannte Bianchi-Beziehung erhält man durch kovariantes Differenzieren

$$R_{\mu\nu\lambda;\rho}^{\sigma} + R_{\mu\rho\nu;\lambda}^{\sigma} + R_{\mu\lambda\rho;\nu}^{\sigma} = 0 \quad (\text{A.5.19})$$

Der Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu}$ , der in den EG vorkommt, läßt sich aus dem Riemann-Tensor wie folgt gewinnen

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} \quad (\text{A.5.20})$$

Zur Berechnung von  $R_{\mu\nu}$  aus den  $g_{\sigma\lambda}$  bedient man sich am besten der Beziehung

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \quad (\text{A.5.21})$$

Schließlich erhalten wir den Ricci-Skalar

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{A.5.22})$$

## A.6. Einstein-Tensor und Geodäten

Wir gehen von der Bianchi-Beziehung aus

$$\hat{R}_{\mu\nu\lambda;\rho}^{\sigma} + \hat{R}_{\mu\rho\nu;\lambda}^{\sigma} + \hat{R}_{\mu\lambda\rho;\nu}^{\sigma} = 0 \quad (\text{A.6.1})$$

und kontrahieren sie über  $\sigma$  und  $\nu$  (d.h. Multiplikation mit  $g^{\sigma\mu}$  und Summation über gleiche Indizes) mit dem Ergebnis

$$\hat{R}_{\mu\lambda;\rho} - \hat{R}_{\mu\lambda\rho;\sigma} - \hat{R}_{\mu\rho;\lambda} = 0 \quad (\text{A.6.2})$$

Nach einer weiteren Kontraktion über  $\mu$  und  $\rho$  erhalten wir schließlich

$$\hat{R}_{\lambda;\sigma} - \frac{1}{2}\hat{R}_{;\lambda} = 0 \quad (\text{A.6.3})$$

was man abgekürzt schreiben kann

$$G_{\lambda;\sigma} = 0 \quad (\text{A.6.4})$$

Dieser symmetrische Tensor

$$G_{\beta}^{\alpha} = \hat{R}_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{R}\delta_{\beta}^{\alpha} \quad (\text{A.6.5})$$

heißt Einstein-Tensor, seine kovariante Ableitung (oder kovariante Divergenz) verschwindet.

Die Ableitung des Ortsvektors nach dem Kurvensegment  $ds$  ergibt den Tangentenvektor

$$\xi^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds} \quad (\text{A.6.6})$$

Die (kovariante) Ableitung des Tangentenvektors erhält man nach Gl. A.5.10 wie folgt

$$\frac{D\xi^{\mu}}{ds} = \xi^{\mu}_{;s} = \frac{d^2x}{ds^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}\xi^{\lambda}\xi^{\nu} \quad (\text{A.6.7})$$

Dieser Ausdruck, Null gesetzt, heißt Geodätengleichung

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}\xi^{\lambda}\xi^{\nu} = 0 \quad (\text{A.6.8})$$

Das erste Glied beschreibt die Änderung der Tangente entlang  $ds$ , das zweite Glied subtrahiert davon den Anteil der Parallelverschiebung. Auf einer Geodäten kompensieren sich beide Teile. Die Geodäte ist das Resultat der Variation von



$$\delta \int ds = 0 \quad \text{oder} \quad \delta \int ds^2 = 0 \quad (\text{A.6.9})$$

was hier nicht bewiesen werden soll. In der ART verlaufen kräftefreie Bewegungen von Massen immer auf Geodäten, d.h. das Extremalprinzip Gl. A.6.9 ist dabei immer erfüllt.

## A.7. Der Dopplereffekt in der speziellen Relativitätstheorie.

Eine Lichtquelle bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in positiver  $x$ -Richtung. Das Korodinatensystem der Lichtquelle sei  $(ct, x, y, z)$ , das des Detektors  $(ct', x', y', z')$ . Die Phase der Lichtwelle

$$kx - \omega t = k'x' - \omega't' \quad (\text{A.7.1})$$

ist ein Skalar und ändert sich nicht bei einer Lorentz-Transformation

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \quad \text{und} \quad ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad (\text{A.7.2})$$

mit

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{A.7.3})$$

Wir setzen Gl. A.7.2 in Gl. A.7.1 auf der rechten Seite ein und erhalten

$$\gamma \left( k - \beta \frac{\omega}{c} \right) x' - \gamma \left( -k\beta + \frac{\omega}{c} \right) ct' = k'x' - \frac{\omega'}{c} ct' \quad (\text{A.7.4})$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left( \frac{\omega}{c} - k\beta \right) \quad (\text{A.7.5})$$

Im Vakuum ist

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{A.7.6})$$

was wir rechts in Gl. A.7.5 einsetzen. Wir erhalten für die Frequenzen

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \quad (\text{A.7.7})$$

oder für die Wellenlängen

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2} \quad (\text{A.7.8})$$

Für kleine Geschwindigkeiten  $\beta \ll 1$  erweitern wir den Bruch mit  $(1+\beta)^{1/2}$  und erhalten so

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \cong \beta \quad (\text{A.7.9})$$

Man beachte aber, dass es sich bei der kosmologischen Rotverschiebung nicht um einen Dopplereffekt handelt.

## A.8. Der Energie-Impuls-Tensor

Der Energie-Impuls-Tensor enthält die Quellen des Gravitationsfelds. In einem Inertialsystem in der Minkowski-Metrik hat er für eine ideale Flüssigkeit die Form

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (\text{A.8.1})$$

Ein Energie-Impuls-Tensor kann für jedes klassische Feld (Flüssigkeiten, Gase, elektromagnetische Felder) angegeben werden. Wenn sich die Flüssigkeit mit der 4-Geschwindigkeit

$$u^\mu = \gamma(1, -\vec{v}/c) \quad (\text{A.8.2})$$

bewegt, lauten die Komponenten

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \quad (\text{A.8.3})$$

wobei  $\eta^{\mu\nu} \equiv (1, -1 -1 -1)$  der metrische Tensor der Minkowski-Metrik bedeutet. In der ART ist  $\eta^{\mu\nu}$  durch  $g^{\mu\nu}$  zu ersetzen. Für die kontravariante Form gilt

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad T_{\mu\nu} = T^{\lambda\sigma} g_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} \quad (\text{A.8.4})$$

Das Inertialsystem in der Kosmologie hat nach Kap. 3 die 4–Geschwindigkeit

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (\text{A.8.5})$$

Unter Berücksichtigung der Komponenten des metrischen Tensors

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -R^2 / (1 - \kappa r^2), \quad g_{22} = -r^2 R^2, \quad g_{33} = -\sin^2 \theta R^2 r^2$$

erhalten wir

$$T_{00} = \varepsilon, \quad T_{11} = p R^2 / (1 - \kappa r^2), \quad T_{22} = p r^2 R^2, \quad T_{33} = p r^2 \sin^2 \theta R^2 \quad (\text{A.8.6})$$

In der Minkowski-Metrik leitet man aus dem Verschwinden der Divergenz von Gl. A.8.3 Erhaltungssätze für die Energieströmung her

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu} = T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.8.7})$$

In der ART tritt anstelle von Gl. A.8.7 die kovariante Ableitung

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = T_{,\nu}^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu T^{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\nu T^{\mu\sigma} = 0 \quad (\text{A.8.8})$$

Um die ziemlich unübersichtliche Rechnung zu erleichtern, empfiehlt es sich, die Summen zunächst nach  $\nu = 0, 1, 2, 3$  zu gliedern

$$\begin{aligned} T_{;\nu}^{\mu\nu} &= T_{,\nu}^{\mu 0} + \Gamma_{0\sigma}^\mu T^{\sigma 0} + \Gamma_{0\sigma}^0 T^{\mu\sigma} \\ &+ T_{,\nu}^{\mu 1} + \Gamma_{1\sigma}^\mu T^{\sigma 1} + \Gamma_{1\sigma}^1 T^{\mu\sigma} \\ &+ T_{,\nu}^{\mu 2} + \Gamma_{2\sigma}^\mu T^{\sigma 2} + \Gamma_{2\sigma}^2 T^{\mu\sigma} \\ &+ T_{,\nu}^{\mu 3} + \Gamma_{3\sigma}^\mu T^{\sigma 3} + \Gamma_{3\sigma}^3 T^{\mu\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8.9})$$

Es werden zur Auswertung noch benötigt

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= c^{-1} R \dot{R} / (1 - \kappa r^2), & \Gamma_{22}^0 &= c^{-1} r^2 R \dot{R}, & \Gamma_{33}^0 &= c^{-1} r^2 \sin^2 \theta R \dot{R}, \\ \Gamma_{01}^1 &= c^{-1} R / \dot{R}, & \Gamma_{11}^1 &= \kappa r / (1 - \kappa r^2), & \Gamma_{22}^1 &= -r / (1 - \kappa r^2), \end{aligned}$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r(1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta,$$

$$\Gamma_{02}^2 = c^{-1} R / \dot{R}, \quad \Gamma_{12}^2 = 1/r, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta,$$

$$\Gamma_{03}^3 = c^{-1} R / \dot{R}, \quad \Gamma_{13}^3 = 1/r, \quad \Gamma_{23}^3 = ctg\theta$$

Nach Weglassen der Glieder, welche sich gegenseitig wegheben, erhält man aus Gl. A.8.9 folgendes Resultat (nach Zeilen geordnet)

$$\begin{aligned} T_{;v}^{\mu\nu} &= \frac{\dot{\varepsilon}}{c} + \\ &+ \frac{p}{c} \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\dot{R}}{R} \\ &+ \frac{p}{c} \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\dot{R}}{R} \\ &+ \frac{p}{c} \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\dot{R}}{R} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8.10})$$

oder

$$\dot{\varepsilon} + 3(\varepsilon + p) \frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad (\text{A.8.11})$$

Zur Diskussion von Gl. A.8.11. : Wenn  $p \ll \varepsilon$  (baryonische Materie) dann wird

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -3 \frac{\dot{R}}{R} \quad (\text{A.8.12})$$

oder

$$\varepsilon \propto R^{-3} \quad (\text{A.8.13})$$

d.h. Masse, bzw. Energie bleibt erhalten. Wenn der Druck  $p$  nicht verschwindet, ist noch eine Zustandsgleichung erforderlich. Für Strahlung ist z.B.  $p = \frac{1}{3}\varepsilon_r$  und man erhält

$$\varepsilon_r \propto R^{-4} \quad (\text{A.8.14})$$

Eine Aussage über den Verlauf von  $R(t)$ , bzw.  $a(t)$  für  $p \neq 0$  erhält man auf folgende Weise aus Gl. A.8.11: Addition von  $\dot{p}$  auf beiden Seiten, danach Multiplikation mit  $R^3$ . Das Resultat kann man wie folgt schreiben

$$\dot{p}R^3 = \frac{d}{dt} [R^3(\varepsilon + p)] \quad (\text{A.8.15})$$

Wir überführen  $\frac{d}{dt}$  in  $\frac{d}{dR}$ , indem wir durch  $\dot{R}$  dividieren. Nach Umordnen der Glieder erhalten wir

$$\frac{d}{dR}(\varepsilon R^3) = -3pR^2 \quad (\text{A.8.16})$$

Ist  $p > 0$  dann nimmt die Dichte mit zunehmendem  $R(t)$  wenigstens wie  $R^{-3}$  ab.

## A 9. Kosmologische Distanzen (s. Gl. 3.32, 3.34 und 5.14).

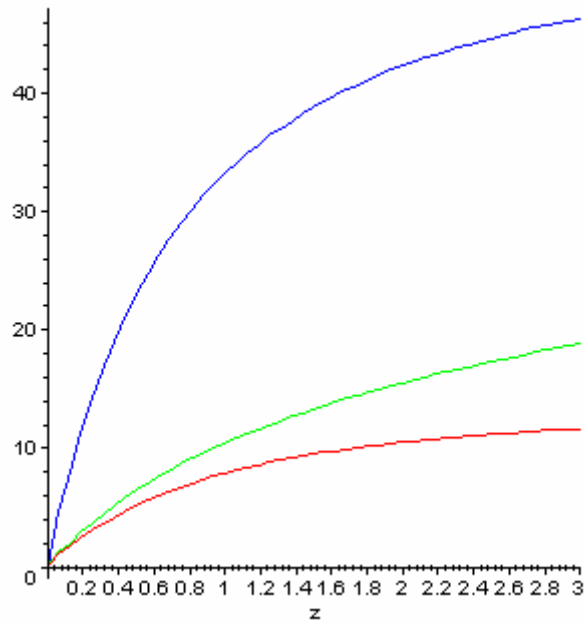
Wir geben hier die gerechneten Kurven für 3 Größen an: die „look-back-time“  $(t - t_0)$  zu  $z$ , den mitbewegten Abstand (comoving distance)  $r$  eines Objekts der Rotverschiebung  $z$ . Er beschreibt den Lichtweg und ist der konformalen Zeit proportional

$$r = c \cdot \tau = c \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = c \int_0^t (z + 1) dt' \quad (\text{A.9.1})$$

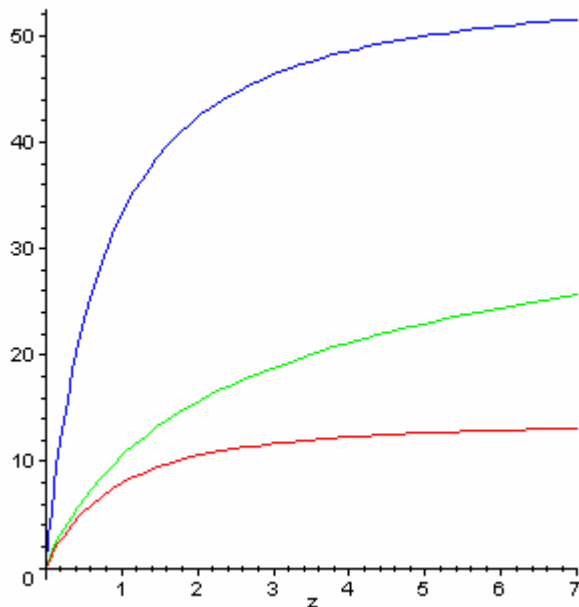
schließlich den Eigenabstand

$$d = a(t) \cdot r = r \cdot (z + 1)^{-1} \quad (\text{A.9.2})$$

$a(t)$  wird mit Gl. 5.14 berechnet. Alle 3 Größen werden in einem Digramm aufgetragen und in  $10^6$  Lichtjahren angegeben ( $1 \text{ pc} = 3,2616 \text{ Lj}$ ). Die Farben bedeuten: rot „look-back-time“, grün mitbewegter Abstand



**Fig. A.9.1. Rote Kurve : Look-back-time , Güne Kurve : „conformal time“  $\tau$  oder mitbewegter Abstand  $r$  . Blaue Kurve : Eigenabstand  $d$  . Alle Werte in  $10^6$  Lichtjahren gegen Rotverschiebung  $z$  (1 pc = 3,6216 Lj).**



**Fig. A.9.2. Wie oben aber Rotverschiebung bis  $z = 7$  aufgetragen.**

Die „look-back-time“ wurde mit folgender Beziehung aus Gl. 5.14 berechnet

$$t = 13,7 \cdot 0,787 \cdot \arcsin h(1,64(1+z)^{-3/2}) \quad (\text{A.9.3})$$

Die „look-back-time“ wird dann

$$t_l = 13,7 - t \quad (\text{A.9.4})$$