

Kosmologische Modelle

Vortrag im Rahmen des Ausbildungsseminars „Vom Urknall zu den Galaxien“



von Marius Schmidl
Universität Regensburg, Fachbereich Physik
November 2007

Kosmologische Modelle sind – wie eben der Name schon andeutet – ein Werkzeug, um das Verhalten und die Eigenschaften unseres, oder auch hypothetischer Universen, einerseits zu verstehen und andererseits auch zu erforschen. Die Komplexität und die überprüfende Beobachtung von bestimmten Sachverhalten, erfordert bei diesem Gebiet der Physik nicht nur eine Reduktion auf wirklich grundlegende Ausgangspositionen, sondern mehr noch, die Betrachtung unter einem ganz ungewohnten Maßstab. Wo man sonst auf kleinste Partikel zu sprechen kommt, wird nun in gleicher Weise ein theoretisches Gerüst um ein Objekt errichtet, welches allein durch seine Ausdehnung dazu auffordert, über Details im Bereich von etwa 10^7 Lichtjahren hinwegzusehen: Unser sichtbares Universum. Da hier das Augenmerk auf dem sichtbaren Universum als ganzem liegt, liefert uns eine Betrachtung nach jener Vorgehensweise auch allgemeine Informationen, die keine speziellen Aussagen zur Milchstraße beinhalten. Dennoch sind damit gefundene Resultate in einer umfassenderen Sicht keinesfalls uninteressant für uns, da wir ja – wenn auch auf einer ganz anderen Skala – ein Teil von allem sind.

Um eine Betrachtung des Raumes und insbesondere Messungen darin zu ermöglichen, beginnen wir mit einigen (bereits bekannten) grundlegenden und wichtigen Schritten, deren erster die Wahl einer geeigneten Metrik ist.

Es wird festgelegt, daß das Universum, im Mittel gesehen, homogen und isotrop sei. Dabei wird über Raumgebiete gemittelt, welche groß genug sind, um eine Vielzahl an Galaxien zu beinhalten. Die Dichte hängt also nicht vom betrachteten Ort ab und keine Richtung ist bevorzugt, was allgemein durch eine Gleichberechtigung von Ort und Richtung im *kosmologischen Prinzip* ausgedrückt wird. Gehen wir nun von diesen, für alle möglichen Raumstrukturen einschränkend wirkenden, Bestimmungen aus, so stoßen wir auf die *Robertson-Walker-Metrik*, welche die auferlegten Anforderungen erfüllt.

Robertson-Walker-Metrik:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right)$$

[ds – Linienelement im vierdimensionalen Raum, $R(t)$ – Skalierungsfaktor der Metrik, k – Separationskonstante]

$k = -1$ steht für negative Krümmung

$k = 0$ beschreibt keine Krümmung (Euklidischer Raum)

$k = +1$ steht für positive Krümmung

Diese Metrik verwendet Gaußsche Normalkoordinaten: $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$

Die Winkelkoordinaten besitzen ihre übliche Bedeutung.

Zur Indizierung: Griechische Indizes durchlaufen die Werte 0, 1, 2, 3, lateinische Indizes durchlaufen die Werte 1, 2, 3; es gilt die übliche Summenkonvention.

Die *Robertson-Walker-Metrik* gilt eigentlich nur lokal und könnte deshalb nicht für ein kosmologisches Modell, welches ja keineswegs nur lokale Aussagen macht, in Frage kommen. Durch das kosmologische Prinzip sorgen wir jedoch dafür, daß diese Metrik für den gesamten Raum anwendbar wird. Ab jetzt legen wir die *Robertson-Walker-Metrik* unserem Weltmodell zugrunde.

Zentraler Bestandteil des kosmologischen Modells sind die *Einsteinschen Feldgleichungen*.

Einsteinsche Feldgleichung:
$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{Sp\{T\}}{2} g_{\mu\nu} \right)$$

[$\tilde{R}_{\mu\nu}$ – Ricci-Tensor, Λ – Kosmologische Konstante, $g_{\mu\nu}$ – Metrischer Tensor, G – Gravitationskonstante, $T_{\mu\nu}$ – Energie-Impuls-Tensor, $Sp\{T\}$ – Spur des Energie-Impuls-Tensors]

In der *ART (Allgemeine Relativitätstheorie)* stellen sie – zusammen mit den Bewegungsgleichungen – das Fundament der mathematischen Behandlungen von Vorgängen, in denen die Gravitation berücksichtigt wird, dar.

Das erste Ziel wird die Lösung dieser Feldgleichungen sein. Mit einer gültigen Lösung lassen sich Auf dem Weg dahin benötigen wir aber noch eine Reihe weiterer Informationen, mit welchen die obenstehende Grundform erklärt wird.

Ricci-Tensor:
$$\tilde{R}_{ip} = \tilde{R}^m_{imp} = g^{km} \tilde{R}_{kimp}$$

Energie-Impuls-Tensor:
$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P^2}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} P$$

[u_μ, u_ν – Relativistische Vierergeschwindigkeit]

(Dies ist der *Energie-Impuls-Tensor* einer idealen Flüssigkeit, welcher aufgrund der Annahme einer kontinuierlichen, idealen Flüssigkeit als Materie des Universums verwendet wird.)

Im *Energie-Impuls-Tensor* sind sämtliche Energieformen enthalten. Energie ist äquivalent zu Masse, somit ist neben der Masse auch jede Art von Energie eine Quelle des Gravitationsfeldes, auch das Feld selbst. Der 00-Komponente kommt die Bedeutung einer Energiedichte zu.

Es gilt:
$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung für Energie und Impuls})$$

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (\text{Symmetrie})$$

Spur des *Energie-Impuls-Tensors*:
$$Sp\{T\} = T^\lambda_{\lambda} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

(Ergänzung – Krümmungstensor:

$$\tilde{R}_{mikp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^i \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^i \partial x^k} \right) + g_{rs} \left(\Gamma_{km}^r \Gamma_{ip}^s - \Gamma_{pm}^r \Gamma_{ik}^s \right)$$

(Ergänzung – Christoffelsymbole: $\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$)

Um die *Einsteinschen Feldgleichungen* zu lösen, schreiben wir den *metrischen Tensor* als Ansatz an.

Metrischer Tensor allgemein:
$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

(Minkowski-Raum: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, Riemannscher Raum: $\kappa, \lambda, \mu, \nu$)

(Ergänzung – $(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Vorzeichen festgelegt durch Konvention))

Für unseren Fall:
$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag} \left(1, -\frac{R(t)^2}{1-kr^2}, -R(t)^2 r^2, -R(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \right)$$

Das *kosmologische Prinzip* gibt uns zwei weitere Zusammenhänge:

$$\rho(r,t) = \rho(t) \quad (\text{Räumlich homogene Dichte})$$

$$P(r,t) = P(t) \quad (\text{Räumlich homogener Druck})$$

Für unser Modell werden die Eigenbewegungen aller Galaxien ausgeblendet, so daß sie sich auf radialen Bahnen und ausschließlich durch den *Skalierungsfaktor* bewegen. Eigenbewegungen wie ein freier Fall in einem Gravitationsfeld (hervorgerufen durch beispielsweise einen Galaxienhaufen) oder die innergalaktische Bewegung von Sternen werden einerseits nicht durch die *Robertson-Walker-Metrik* beschrieben und andererseits gleicht das *kosmologische Prinzip* die Abweichungen im Mittel aus.

Das heißt: $x^i = \text{konst}$

Es existiert eine Nebenbedingung an die Geschwindigkeit: $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2$

$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{cdx^\alpha}{ds}$ ist dabei wieder die relativistische Vierergeschwindigkeit.

$$\left. \begin{array}{l} u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \\ g_{00} = 1 \\ g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2 \end{array} \right\} (u^\mu) = (u_\mu) = (c, 0, 0, 0)$$

Einsetzen in den *Energie-Impuls-Tensor* bringt diesen auf folgende Form:

$$(T_{\mu\nu}) = \text{diag} \left(\rho c^2, \frac{PR^2}{1-kr^2}, PR^2 r^2, PR^2 r^2 \sin^2 \theta \right)$$

Damit folgt auch: $Sp\{T\} = \rho c^2 - 3P$

Des Weiteren werden die Komponenten des *Ricci-Tensors* benötigt. Alle nichtverschwindenden Komponenten setzen sich folgendermaßen zusammen:

$$\tilde{R}_{00} = \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2}$$

$$\tilde{R}_{01} = \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{\dot{V}V'}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} = R_{10}$$

$$\tilde{R}_{11} = -\frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} + \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{UV'}{2UV}$$

$$\tilde{R}_{22} = -1 - \frac{\ddot{V}}{2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{4U} + \frac{V''}{2U} - \frac{V'U'}{4U^2}$$

$$\tilde{R}_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$$

[U, V – Metrische Koeffizienten]

Wir legen

$$U = \frac{R^2}{1-kr^2} \quad \text{und} \quad V = R^2 r^2$$

fest und berechnen die nichtverschwindenden Komponenten des *Ricci-Tensors*:

$$\left(\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial(ct)}\right)$$

$$\tilde{R}_{00} = \frac{3\ddot{R}}{R}$$

$$\tilde{R}_{11} = -\frac{1}{1-kr^2} (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)$$

$$\tilde{R}_{22} = -r^2 (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)$$

$$\tilde{R}_{33} = -r^2 \sin^2 \theta (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)$$

Nun haben wir alle notwendigen Größen zur Verfügung, um die *Einsteinsche Feldgleichung* zu nutzen. Die Ergebnisse werden eingesetzt:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{Sp\{T\}}{2} g_{\mu\nu} \right)$$

Als Beispiel wird nun die 00-Komponente der *Einsteinschen Feldgleichung* berechnet:

$$\underbrace{\tilde{R}_{00}}_{\textcircled{1}} - \Lambda \underbrace{g_{00}}_{\textcircled{2}} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(\underbrace{T_{00}}_{\textcircled{3}} - \frac{\overbrace{Sp\{T\}}^{\textcircled{4}}}{2} \underbrace{g_{00}}_{\textcircled{2}} \right)$$

Es folgen alle für die Kalkulation benötigten Größen:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \tilde{R}_{00} &= \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} \stackrel{U=\frac{R^2}{1-kr^2}, V=R^2r^2}{=} \\ &= \frac{2\ddot{R}R + 2\dot{R}^2}{1-kr^2} + \frac{2\dot{R}Rr^2 + 2\dot{R}^2r^2}{R^2r^2} - \frac{4\dot{R}^2R^2}{(1-kr^2)^2} - \frac{4\dot{R}^2R^2r^4}{2R^4r^4} = \\ &= 3\frac{\ddot{R}R + \dot{R}^2}{R^2} - 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{3\ddot{R}}{R} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad g_{00} = 1$$

$$\textcircled{3} \quad T_{00} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_0 u_0 - g_{00} P \stackrel{u_0=c}{=} \rho c^2$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad Sp\{T\} &= T^\lambda{}_\lambda = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}} T_{\mu\nu} = \\ &= \rho c^2 - \frac{1-kr^2}{R^2} \frac{PR^2}{1-kr^2} - \frac{1}{R^2 r^2} PR^2 r^2 - \frac{1}{R^2 r^2 \sin^2 \theta} PR^2 r^2 \sin^2 \theta = \\ &= \rho c^2 - 3P \end{aligned}$$

Einsetzen von ① bis ④:

$$\frac{3\ddot{R}}{R} - \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(\rho c^2 - \frac{\rho c^2 - 3P}{2} \right)$$

$$\rightarrow \text{00-Komponente: } 3\ddot{R} - \Lambda R = -\frac{8\pi GR}{c^4} \left(\rho c^2 - \frac{\rho c^2}{2} + \frac{3P}{2} \right)$$

$$\rightarrow \text{Räumliche Komponenten: } R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 - \Lambda R + 2k = \frac{4\pi GR^2}{c^4} (\rho c^2 - P)$$

Die erste Gleichung wird nach \ddot{R} aufgelöst. Anschließend ersetzt man \ddot{R} in der zweiten Gleichung durch diese und erhält:

$$\dot{R}^2 - \frac{\Lambda R^2}{3} + k = \frac{8\pi \rho GR^2}{3c^2}$$

Jetzt wird dieser Ausdruck differenziert:

$$2\dot{R}\ddot{R} - \frac{2\Lambda R\dot{R}}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2} (R^2 \dot{\rho} + 2\rho R\dot{R})$$

Wenn nun die Differenz aus der obenstehenden und der modifizierten Gleichung der 00-Komponente (multipliziert mit $2\dot{R}/3$)

$$2\dot{R}\ddot{R} - \frac{2\Lambda R\dot{R}}{3} = -\frac{8\pi G}{3c^2} \left(\rho R\dot{R} + \frac{3PR\dot{R}}{c^2} \right)$$

gebildet wird, so nimmt das Ergebnis die Form

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{R}}{R} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right)$$

an.

Zur Lösung der beiden aus der *Einsteinschen Feldgleichung* gewonnenen Differentialgleichungen für den Skalierungsfaktor, die Dichte und den Druck (welche wir nun zusammengeschrieben und auf diese kompakte Form gebracht haben), fehlt noch ein dritter Zusammenhang, den wir durch zwei Grenzfälle für die Zustandsgleichung des Druckes miteinbeziehen:

$$P = \frac{\rho c^2}{3} \quad \text{für Strahlungsdominanz; Voraussetzungen: Exakt für elektromagnetische Strahlung, in Näherung gültig für hochrelativistische Teilchen}$$

Für das frühe Universum ist diese Gleichung die richtige Wahl.

$$P = 0 \quad \text{für inkohärente Materie; Voraussetzungen: Nichtrelativistische Teilchen, } P \ll \rho c^2$$

Dies stellt eine brauchbare Näherung für das heutige Universum dar.

In Verbindung mit der letzten Formel ergeben sich zwei verschiedene Massendichten. Eine davon ist strahlungsdominiert, die andere materiedominiert.

$$\rho_{str}(t) R(t)^4 = konst \quad \text{mit } P = \frac{\rho c^2}{3}$$

$$\rho_{mat}(t) R(t)^3 = konst \quad \text{mit } P = 0 \quad (\text{Massenerhaltung})$$

Ausgehend von der Annahme, daß Strahlung und Materie nicht wechselwirken oder daß eine von beiden die Massendichte dominiert, gelten beide Zusammenhänge separat. Die Massendichte setzt sich jetzt aus beiden Termen zusammen:

$$\rho = \rho_{str} + \rho_{mat}$$

Mit einer bereits früher verwendeten Formel und zwei Zusammenfassungen ergibt sich das *Friedmann-Modell*:

$$\dot{R}^2 - \frac{\Lambda R^2}{3} + k = \frac{8\pi\rho GR^2}{3c^2}$$

$$\downarrow \quad \rho = \rho_{str} + \rho_{mat}, \quad K_{str} = \frac{8\pi\rho_{str}GR^4}{3c^2} = konst, \quad K_{mat} = \frac{8\pi\rho_{mat}GR^3}{3c^2} = konst$$

Friedmann-Modell:

$$\dot{R}^2 - \frac{K_{str}}{R^2} - \frac{K_{mat}}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3} = -k$$

Eine andere Schreibweise verwendet den Skalenfaktor $a(t) = R(t)/R(t_0) = R(t)/R_0$.

Hier werden andere Einheiten ($c \neq 1$), sowie der Hubble-Parameter H' verwendet:

Friedmann-Modell:
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\rho G}{3} - \frac{k'c^2}{a^2} = H'^2$$

Die zweite dazugehörige Gleichung ist die *Beschleunigungsgleichung*:

Friedmann-Modell:
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right)$$

Anschaulich lässt sich dies so verstehen: Mit dem Skalenfaktor beschreibt man die Expansion des Universums auf einfache Weise. Vervielfacht sich der Wert des Skalenfaktors um eine Zahl, so ändern sich auch die Abstände im Universum um diesen Faktor.

Sämtliche vorangegangenen Herleitungen erlauben uns jetzt, die großräumige Bewegung des Universums durch die Bewegungsgleichung des *Friedmann-Modells* zu beschreiben. Nun wird untersucht, welche verschiedenen Arten von kosmologischen Modellen sich ergeben und welche Auswirkungen die einzelnen Größen haben. Zuerst folgt die Diskussion des grundlegenden *Friedmann-Modells* im Detail:

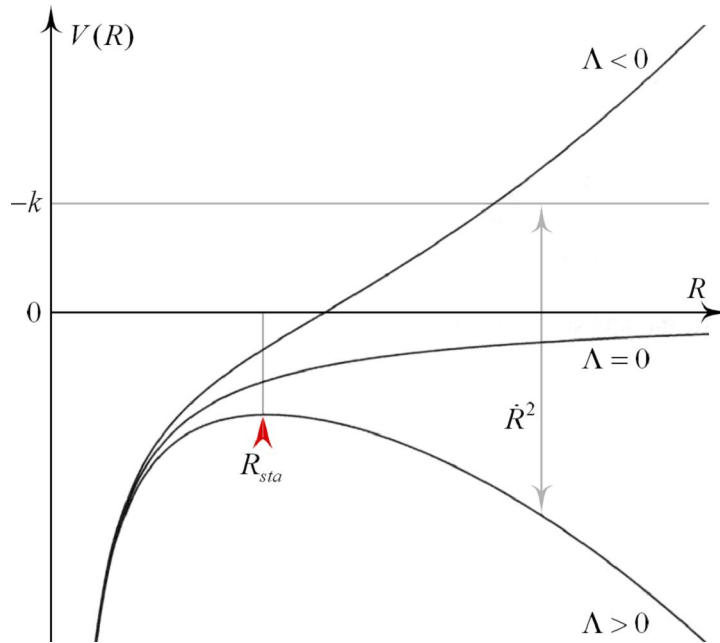
Eine andere Form für das *Friedmann-Modell*: $\dot{R}^2 + V(R) = -k$

Dazu führt man das effektive Potential $V(R)$ ein:

$$V(R) = -\frac{K_{str}}{R^2} - \frac{K_{mat}}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}$$

$$[V(R)] = [\dot{R}] = [k] = 1$$

Mit $k < 0$ ergibt sich eine Darstellung, aus der einige Informationen über die einzelnen Größen und deren Zusammenhang entnommen werden können:



Es sind drei mögliche Lösungen für den Skalierungsfaktor eingezeichnet, die vom Vorzeichen der kosmischen Konstante abhängen.

Der rote Pfeil markiert eine statische Lösung für $\Lambda > 0$ bei $R(t) = R_{sta} = konst$, die jedoch instabil ist.

In realistischen kosmologischen Modellen ist die Strahlungsdominanz für einen bestimmten Zeitraum – bis etwa zum Zeitpunkt 10^{-6} des heutigen Weltalters – jedoch immer vertreten, was bedeutet:

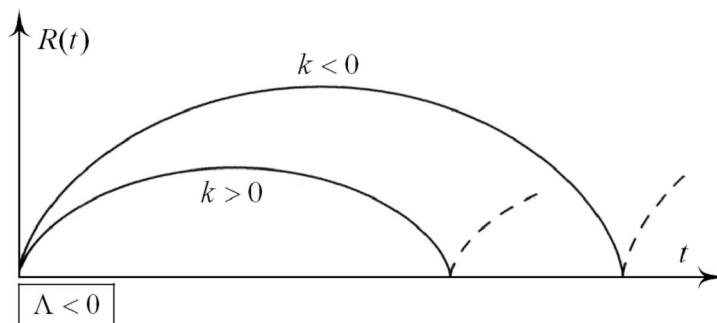
$$K_{str} \neq 0: \text{ Für } R \rightarrow 0 \text{ gilt } R(t) \propto \sqrt{t}$$

Nächster Punkt der Betrachtung wird die kosmologische Konstante sein, welche großen Einfluß auf die Entwicklung des jeweiligen Modells nimmt. Besondere Rücksicht nehmen wir auf die verschiedene Fälle und deren durch sie bestimmte Auswirkungen:

$\Lambda < 0$

R bewegt sich periodisch im Intervall $[0, R_{max}]$.

R_{max} ist dabei von der Wahl von k abhängig. Es gilt: $\dot{R} \xrightarrow{R \rightarrow R_{max}} 0$



$\Lambda = 0$

Folgende drei Fälle sind zu unterscheiden:

❶ $k = -1$

Die Geschwindigkeit der Expansion geht gegen einen konstanten Wert.

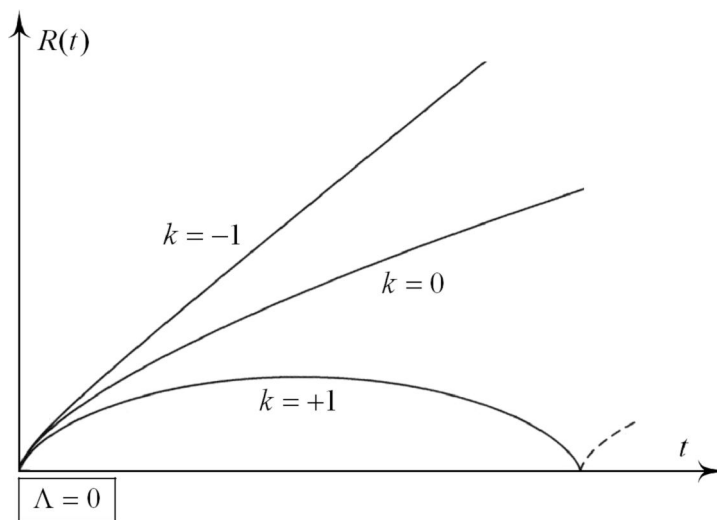
❷ $k = 0$

Die Geschwindigkeit der Expansion geht mit der Zeit gegen Null.

▷ **Einstein-De-Sitter-Universum**

❸ $k = +1$

Nach und nach geht die Expansion in eine Kontraktion über, so wie im Falle $\Lambda < 0$.



$\Lambda > 0$

① $\begin{cases} k = -1 \\ k = 0 \end{cases}$ sowie $\Lambda = \Lambda_{kri}$

Die Waagerechte $k = 1$ und das Potential $V(R)$ schneiden sich nicht.

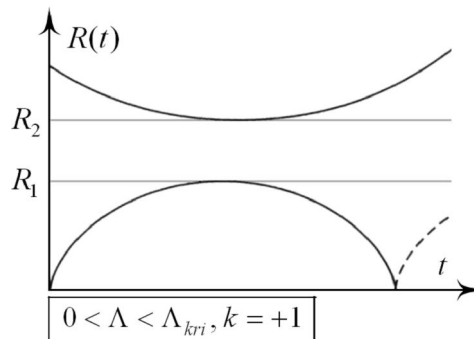
Dort, wo sich das Maximum des Potentials befindet, dehnt sich das Universum langsamer aus, da die Geschwindigkeit der Expansion \dot{R} (der Abstand) kleiner ist.

② $k = +1$ sowie $\Lambda < \Lambda_{kri}$

$V(R)$ wird durch die Waagerechte $k = 1$ zweimal geschnitten.

Der erste Schnittpunkt ist R_1 , der zweite ist R_2 .

Entweder es entsteht eine periodische Lösung im Intervall $[0, R_1]$, oder eine ungebundene Lösung mit $R > R_2$.

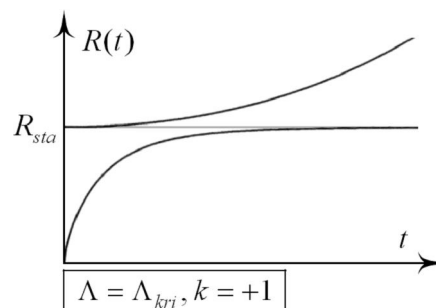


③ $k = +1$ sowie $\Lambda = \Lambda_{kri}$

Die Waagerechte $k = 1$ schneidet $V(R)$ genau im Maximum.

Daraus ergibt sich eine statische ($R(t) = konst$), jedoch instabile Lösung mit $K_{str} \approx 0$.

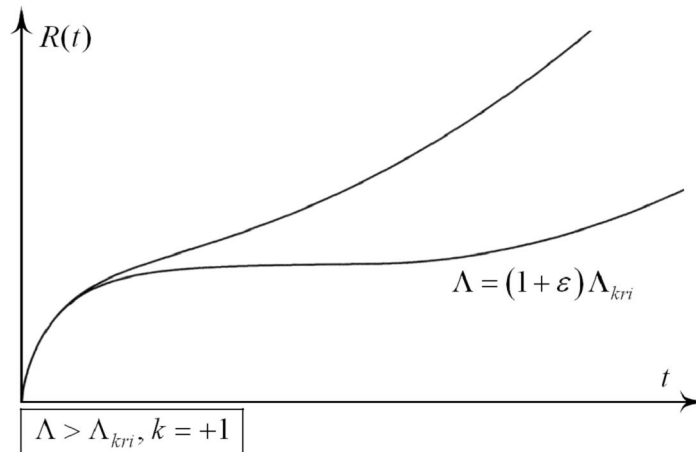
▷ **Statische Einstein-Lösung**



④ $k = +1$ sowie $\Lambda = (1 + \varepsilon) \Lambda_{kri}$
 $\varepsilon \ll 1$

Dicht unterhalb der Waagerechten $k = 1$ liegt das Maximum von $V(R)$.
 \dot{R} (der Abstand) ist hier klein und deshalb verlangsamt sich die Expansion.

▷ **Lemaître-Universum**



⑤ $k = +1$ sowie $\Lambda > \Lambda_{kri}$

Es läßt sich kein Schnittpunkt der Waagerechten $k = 1$ und des Potentials $V(R)$ finden.
 Bei dem Maximum von $V(R)$ ist \dot{R} , die Geschwindigkeit der Expansion geringer, allerdings höher als im Fall 1.

In der obenstehenden Graphik ist dies durch die obere der beiden Kurven dargestellt.

Nach diesen Darstellungen beschäftigen wir uns näher mit den für uns interessanten Aspekten:

Für unser heutiges Universum gilt: $K_{str} \approx 0$

Aus dem *Friedmann-Modell* erhält man unter Berücksichtigung dessen:

$$\dot{R}^2 - \frac{K_{mat}}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3} = -k$$

Folgende Zusammenhänge

$$R_0 = R(t_0)$$

$$\tau = Ht$$

$$H/c = \dot{R}(t_0)/R_0 \approx (68,7_{-4,7}^{+3,4}) \text{ km/s/Mpc}$$

$$x(\tau) = R(t)/R_0$$

$$v = -\ddot{R}(t_0)R_0/\dot{R}(t_0)^2 = \Omega_M/2 - \Omega_\Lambda \approx -0,59 \pm 0,03$$

$$\rho_{kri} = 3H^2 / (8\pi G) \approx 0,93 \cdot 10^{-26} \text{ kg/m}^3$$

$$\Omega_M = \rho_{mat}(t_0) / \rho_{kri}(t_0)$$

$$\Omega_\Lambda = \Lambda c^2 / (3H^2)$$

$$\Omega_K = -kc^2 / (R_0^2 H^2)$$

[t_0 – Heutige Zeit, H – Hubble-Konstante mit $[H] = 1/s$, v – Verzögerungsparameter, ρ_{kri} – Kritische Massendichte, Ω_M – Massendichte, Ω_Λ – Kosmologische Konstante, Ω_K – Krümmung des heutigen Universums]

liefern daraus:

$$\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \frac{\Omega_M}{x} - \Omega_\Lambda x^2 = \Omega_K$$

Für den heutigen Zeitpunkt läßt sich festlegen:

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1$$

Je größer einer der drei Beiträge ist, desto größer ist der Einfluß seiner Ursache in der Bewegungsgleichung zum heutigen Zeitpunkt. Insgesamt läßt sich ein kosmologisches Modell durch die folgenden Größen festlegen. Da auch die praktische Seite an all diesen Überlegungen interessiert, werden hier einige Methoden zur Messung und zur Herleitung für Richtwerte gegeben.

Charakteristische Größen: Ω_M Ω_S Ω_Λ Ω_K H v

Werte für die Hubble-Konstante und den Verzögerungsparameter lassen sich durch Beobachtung von Supernovae vom Typ Ia festlegen (*Hubble-Space-Telescope*).

Analysiert man die Bewegung der äußeren Galaxien von Galaxiehaufen, so kann man auf die Masse der Galaxiehaufen schließen, was wiederum eine Wichtung für den Ausdruck der Materiedichte ermöglicht. Allerdings reicht die sichtbare Materie nicht aus, um dessen Wert zu erreichen, deswegen muß auch dunkle Materie berücksichtigt werden, deren Beitrag ebenfalls meßbar ist.

Weitere Daten erhält man durch die Untersuchung der Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung:

Die Ergebnisse sind: $\Omega_M = 0,273_{-0,032}^{+0,031}$, $\Omega_\Lambda = 0,727_{-0,032}^{+0,031}$, $\Omega_K = -0,023_{-0,050}^{+0,017} \approx 0$

Man erkennt eine fast verschwindende Krümmung für den Kosmos.

Der Wert für die kosmologische Energiedichte, der – anders als Materiedichte – gravitativ abstoßend wirkt, läßt sich theoretisch noch nicht erklären.

Im letzten Teil dieses Themengebietes wird noch einmal auf die gerade erwähnte dunkle Materie und auch auf den Einfluß von dunkler Energie eingegangen. Die Existenz von dunkler Materie ist ja aus dem gemessenen Wert für den die Materiedichte beinhaltenden Ausdruck ersichtlich.

Der dunkle Anteil an der Massendichte beträgt: $\Omega_{DM} = 0.225 \pm 0,03$

Aus der Energieerhaltung

$$\Delta E = (\rho_{\Lambda} c^2 + P_{\Lambda}) \Delta V = 0$$

folgt bei einer Expansion des Universums um ΔV :

$$P_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} c^2$$

Damit nimmt der (in der Gesamtdensität oder im *Energie-Impuls-Tensor* enthaltene) Druck einen negativen Wert an.

Dies bedingt die antigravitative Wirkung von ρ_{Λ} .

Man sieht besonders direkt an der Umformung einer bereits oben verwendeten Formel, daß die zur Materiedichte gehörende Kraft aufgrund des Vorzeichens gegen die Kraft der kosmologischen Konstante wirkt:

$$\Omega_M x^{-1} + \Omega_{\Lambda} x^2 = \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \Omega_K$$

Mit dieser Feststellung endet diese Abhandlung, welche einen Einblick in das interessante Gebiet der kosmologischen Modelle geben soll.

Quellen:

FLIESSBACH, Torsten: Allgemeine Relativitätstheorie
Spektrum Akademischer Verlag, 2006

LIDDLE, Andrew: An Introduction to Modern Cosmology
Wiley & Sons, 2003