Lösungen zu 2.6.

2.6.1. Die Einsteingleichung lässt sich auch in der Form schreiben

$$R_{kl} = \kappa\left(T_{kl} - \frac{1}{2} g_{kl} T\right)$$

wobei T definiert ist als folgende Summe $T = g^{kl} T_{kl}$.

Starten mit Einstein Gl. . Multiplizieren mit g^{ik} und Summieren

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{kl} R = \kappa T_{ik} \quad \Big| \cdot g^{ik}$$

$$R_{ik} g^{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} g^{ik} R = \kappa T_{ik} g^{ik}$$

$$R - \frac{1}{2} \cdot 4 R = \kappa T$$

$$-R = \kappa T \quad \Big| \cdot \left(-\frac{g_{kl}}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} g_{kl} R = -\kappa \frac{1}{2} g_{kl} T \qquad \text{Addiere Einstein Gl.}$$

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{kl} R = \kappa T_{ik}$$

Das Resultat hat die gewünschte Form $\quad R_{kl} = \kappa\left(T_{kl} - \frac{1}{2} g_{kl} T\right)$

2.6.2. Metrik der Kugeloberfläche $ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi$

Daraus Lagrangefkt. $2L = m r^2 \dot{\theta}^2 + m r^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2$

Aus $\int L\, dt = Extremum$ folgt $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0 \quad$ mit $x^1 = \theta,\ x^2 = \phi$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad$ Festlegung der Randbed. $\theta = \pi/2,\ \ \dot{\theta} = 0$

$$mr^2 \ddot{\theta} - r^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\phi}^2 = 0 \quad \text{ergibt} \quad \ddot{\theta} = 0$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad 2m r^2 \sin^2\theta\, \ddot{\phi} = 0$ folgt $mr^2 \dot{\phi} = J = const.$ Drehimjpuls ist konstant (auf dem Äquator) ein Großkreis ist geodätische Bahn.

Die Bahn in der Äquator-Ebene kann in $\phi(t)$; $r = konst.$ berechnet werden.

$$\phi_2 - \phi_1 = \int_1^2 \frac{J}{m r^2} dt$$

2.6.3. Unter welchem Winkel erscheint das Schwarze Loch im Zentrum unserer Galaxie?

Durchmesser des Schw. Lochs $2r_S = 4 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 2{,}95\ km$

Abstand von Erde $D = 8{,}3 \cdot 10^3 \cdot 3{,}08 \cdot 10^{13}$

Beobachtet wird $tg\delta = \dfrac{2r_S}{D}$ gefragt ist $arctg\, \dfrac{2r_S}{D}$ *in Mikrobogensek.*

$$\delta = 9{,}23 \cdot 10^{-11} \cong 19\ Mikrobogensek.$$

Numerik

> $evalf\left(\frac{2 \cdot \pi}{360 \cdot 3600}\right);$ $tg\ 1'' =$

0.00000484813681

$evalf\left(\frac{4 \cdot 2 \cdot 2.95 \cdot 10^6}{8.3 \cdot 10^3 \cdot 3.08 \cdot 10^{13}}\right);$ 2rS/D=v

$9.231732123 10^{-11}$

$\frac{9.23 \cdot 10^{-11}}{4.85 \cdot 10^{-6}};$

0.0000190309278

arctg $2r_S/D$ in Bogensek. 19 **Mikro<u>B</u>ogensek**

<u>Fakultative Aufgabe</u> :

$$R_{ik} = \Gamma^l_{ik,l} - \Gamma^l_{il,k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$$

$$R_{00} = \Gamma^l_{00,l} - \Gamma^l_{0l,0} + \Gamma^l_{00}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{0l}\Gamma^l_{0m} =$$

$$= \alpha'' \exp 2(\alpha - \beta) + 2\alpha'(\alpha' - \beta') \exp 2(\alpha - \beta) - 0 + \Gamma^1_{00}\Gamma^m_{1m} - \Gamma^m_{0l}\Gamma^l_{0m}$$

$$-\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} = \alpha'^2 \exp 2(\alpha - \beta)$$

$$\Gamma^1_{00}\Gamma^m_{1m} = \alpha' \exp 2(\alpha - \beta) \cdot \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \beta'\right]$$

$$R_{00} = \exp 2(\alpha-\beta)\left[\alpha'' + 2\alpha'^2 - 2\alpha'\beta' + \frac{2\alpha'}{r} + \alpha'\beta' - \alpha'^2\right]$$

$$R_{00} = \exp 2(\alpha-\beta)\left[\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta' + \frac{2\alpha'}{r}\right] = 0$$ Ergebnis

$$R_{11} = \Gamma^l_{11,l} - \Gamma^l_{1l,1} + \Gamma^l_{11}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{1l}\Gamma^l_{1m}$$

$$R_{11} = \beta'' - \Gamma^0_{10,1} - \Gamma^1_{11,1} - \Gamma^2_{12,1} - \Gamma^3_{13,1} + \Gamma^1_{11}\left[\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}\right] - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{13}$$

$+$

$$-\Gamma^0_{10,1} - \Gamma^1_{11,1} - \Gamma^2_{12,1} - \Gamma^3_{13,1} = -\alpha'' - \beta'' + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}$$

$$\Gamma^1_{11}[] = \beta'\left[\alpha' + \beta' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right] = \alpha'\beta' + \beta'^2 + \frac{2\beta'}{r} =$$

$$----= -\alpha'^2 - \beta'^2 - \frac{2}{r^2}$$

$$R_{11} = \beta'' - \alpha'' - \beta'' + \frac{2}{r^2} + \alpha'\beta' + \beta'^2 + \frac{2\beta'}{r} - \alpha'^2 - \beta'^2 - \frac{2}{r^2}$$

$$R_{11} = -\alpha'' + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r} - \alpha'^2 = 0$$ Ergebnis

---