Lösungen zu 3.5.

3.5.1.

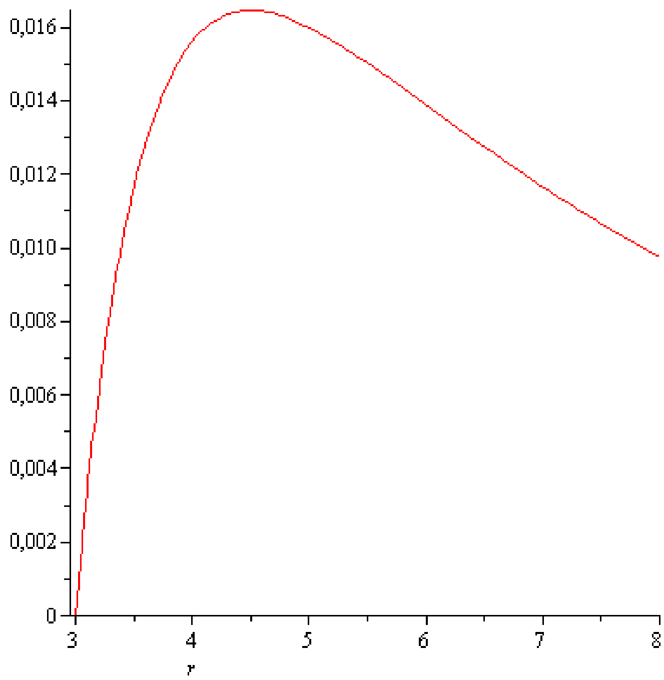
Aufsuchen eines Extremums von $V_{eff}(r) = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)$ durch

$$\frac{\partial}{\partial r} V_{eff}(r) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r_S}{r^3}\right] = -\left[\frac{2}{r^3} - \frac{3r_S}{r^4}\right] = 0$$

$r = \frac{3}{2} r_S = 3M$. Maximum oder Minimum? Dazu 2. Ableitung prüfen.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} V_{eff}(r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[-\frac{2}{r^3} + \frac{3r_S}{r^4}\right] = \left[\frac{6}{r^4} - \frac{12 r_S}{r^5}\right] \approx \frac{1{,}18 - 0{,}39}{r_S^4} \approx \frac{0{,}78}{r_S^4} > 0$$

An der Stelle $r = \frac{3}{2} r_S = 3M$ hat die 2. Abl. Positive Krümmung, also Maximum.



Zur Fig. : Geplottet mit Zahlenwerten $2M = r_S = 3$. Man erhält man ein Max. bei r = 4,5; V(4,5)= 0.016

3.5.2. $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)$ Einsetzen von $r = \frac{3}{2} r_S = 3M$ ergibt

$b^2 = \frac{27}{4} r_S^2 = 27M^2$ oder $b = 3\sqrt{3}M$ Die Höhe der Potentialkurve bei $r = \frac{3}{2} r_S = 3M$ wird

$$\frac{1}{b^2}[r = 3M] = 27M^2 .$$

$b > 3\sqrt{3}M$ bedeutet $\frac{1}{b^2} < V_{\max}$ masselose Teilchen werden zurück gestreut

$b < 3\sqrt{3}M$ bedeutet $\frac{1}{b^2} > V_{\max}$ masselose Teilchen werden vom Schw. Loch eingefangen.

3.5.3. Rotverschiebung

$$\frac{v_{rec}}{v_{em}} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{1/2} = \frac{\lambda_{lab}}{\lambda_{rec}} = \frac{1}{z_g + 1}$$

$$\frac{v_{rec}}{v_{em}} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1{,}73} = \frac{\lambda_{lab}}{\lambda_{rec}} = \frac{1}{z_g + 1} = 0{,}577$$

Die Gravitations-Rotverschiebung beträgt $z_g = 0{,}73$