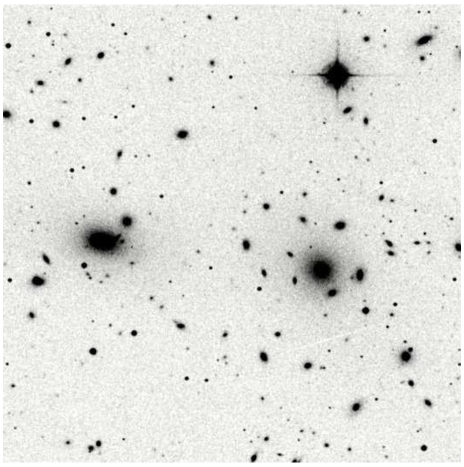
Frühes Universum in Newton'scher Kosmologie

Tobias Lautenschlager

27. Juni 2007



Inhaltsverzeichnis

1 Annahmen

1.1 Das kosmologische Prinzip

Nach dem kosmologischen Prinzip ist das Universum **homogen** und **isoptrop**. Da die Materie lokal zum Beispiel in unserer Galaxie nicht gleichverteilt ist, betrachtet man nur ausreichend große Längenskalen, in denen diese Bedingung erfüllt ist. Diese Bereiche haben eine Ausdehnung von ca. 100 Millionen Lichtjahren.

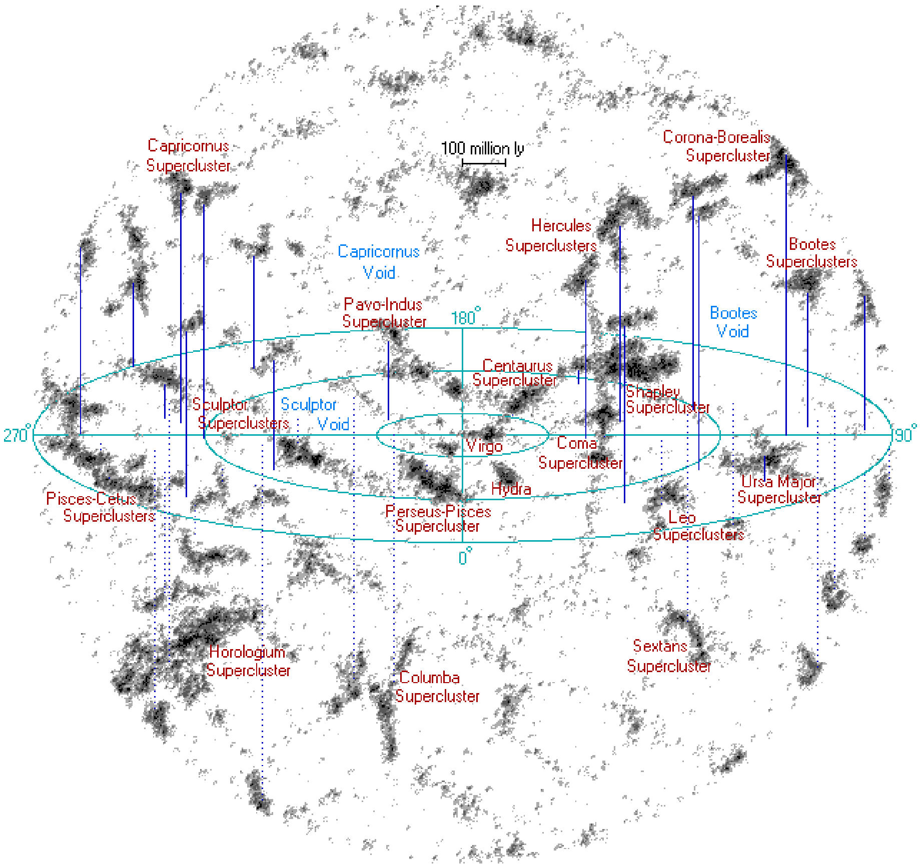


Abbildung 1: Weltall in unserer Umgebung [4]

Bild 1.1 zeigt unsere Umgebung im Weltall. Auf dieser Skala kann man sicher nicht von Homogenität sprechen. Wir betrachten hier also noch größere Skalen. Durch die Homogenität gibt es auch keinen „Rand“ des Universums, da Punkte am Rand ja wieder ausgezeichnet wären. Durch das kosmologische Prinzip ist das Universum unendlich groß oder periodisch.

1.2 Die Bewegung von Galaxien

Wir nehmen nun an, daß die Galaxien keine Eigenbewegung ausführen, d.h. es besteht keine Wechselwirkung zwischen ihnen. Die Koordinate x^i an der sich eine Galaxie befindet ist also konstant. Die zeitliche Bewegung der Galaxie hängt nur von einem Skalenfaktor $R(t)$ ab. Die Position einer Galaxie kann also mit

$$\vec{r}(t) = R(t)\vec{x} \tag{1}$$

angegeben werden. Diese Koordinaten nennt man auch **mitbewegte Koordinaten**. Die Metrik, die die Eigenschaften aus Abschnitt 1.1 erfüllt ist die Robertson-Walker Metrik. Wir verwenden bei Rechnungen immer Gaußkoordinaten ($x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$).

2 Struktur des Universums

2.1 Der Hubble Fluß

Die Geschwindigkeiten Strahlung emittierender Objekte relativ zu einem Beobachter kann mit Hilfe der Rotverschiebung gemessen werden. Man beobachtet eine Rotverschiebung fast aller Objekte relativ zur Erde. Auch ist die Geschwindigkeit mit der sie sich entfernen umso größer, je größer der Abstand ist.
Dadurch ist das kosmologische Prinzip (1.1) nicht verletzt, da diese Beobachtung für alle Punkte im Raum gilt.
Edwin Hubble fand den linearen Zusammenhang zwischen der Radialgeschwindigkeit v und dem Abstand D einer Galaxie.

$$v = H_0 D \tag{2}$$

H_0 bezeichnet die Hubble Konstante zum Zeitpunkt t_0. Diese Abkürzung verwenden wir auch bei anderen Größen, insbesondere beim Skalenfaktor R.

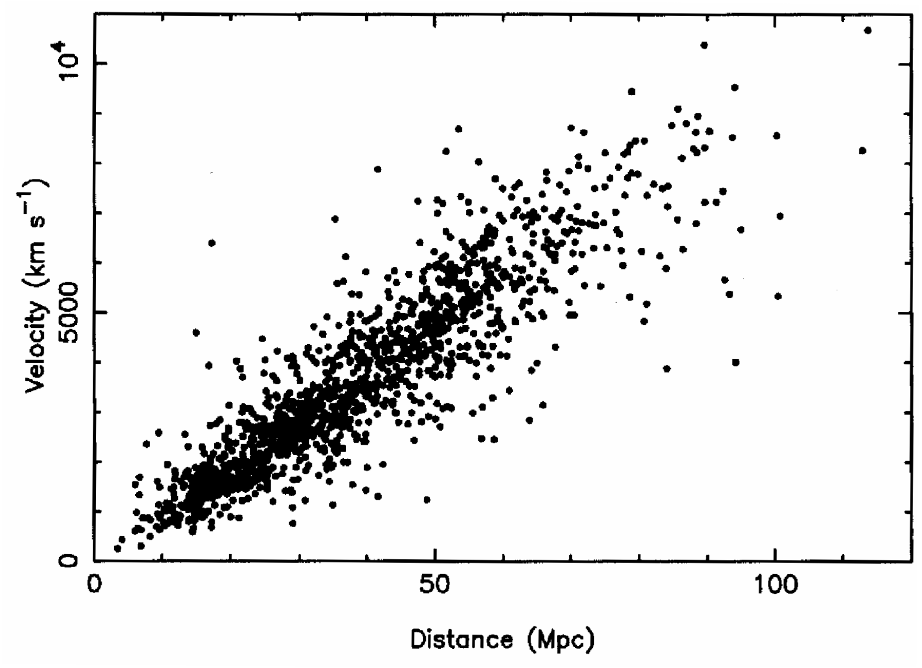


Abbildung 2: Auftragung der Geschwindigkeit gegen die Entfernung von 1355 Galaxien [3]

Verknüpft man dieses Gesetz mit der Annahme in Kapitel 1.2 erhält man

$$H_0 = \frac{c\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \quad mit \quad \dot{R} := \frac{dR}{d(ct)} \tag{3}$$

Die Hubblekonstante kann sich also mit der Zeit ändern. Messungen ergaben einen Wert von $(68,7^{+3,4}_{-4,7})\frac{km}{s \cdot Mpc}$ für die heutige Hubblekonstante.
Der Kehrwert der Hubblekonstanten hat die Dimension einer Zeit. Den Kehrwert nennt man Hubblezeit und diese beträgt ca. 13 Milliarden Jahre.

2.2 Die kosmologische Rotverschiebung

Wir wollen nun die Rotverschiebung in Abhängigkeit des Abstands bestimmen. Eine elektromagnetische Welle wird von einer Galaxie zum Zeitpunkt t_1 ausgesandt und an einem anderen Punkt zum Zeitpunkt t_0 empfangen. Wegen der Homogenität und Isotropie des Raumes betrachten wir nur die Radialkomponente der Koordinaten. Das invariante Wegelement einer Lichttrajektorie zwischen $\chi(t_1) = 0$ und $\chi(t_0) = \chi$ lautet dann

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 \quad mit \quad r(t) = R(t)\chi \tag{4}$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - R(t)^2d\chi^2 = 0 \rightarrow d\chi = \frac{cdt}{R(t)} \tag{5}$$

Zwei aufeinanderfolgende Wellenberge legen den gleichen Weg χ zurück, da χ die radiale Koordinate ohne Zeitabhängigkeit ist.

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} \tag{6}$$

Daraus folgt

$$0 = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{cdt}{R(t)} \tag{7}$$

Für sichtbares Licht liegt der Abstand zwischen zwei Wellenbergen bei $10^{-15}s$, daher kann man $R(t)$ in dieser Zeit als konstant annehmen. Nach Integration von (7) erhalten wir

$$0 = \frac{c\delta t_0}{R(t_0)} - \frac{c\delta t_1}{R(t_1)} \tag{8}$$

Drückt man obiges Ergebnis durch die Frequenz ν ($\delta t = \frac{1}{\nu}$) aus:

$$R(t_1)\nu_1 = R(t_0)\nu_0 \tag{9}$$

Analysiert man nun das Spektrum von Galaxien, findet man Gruppen von Spektrallinien, die man bekannten Atomübergänge zuordnet. Die Linien sind jedoch alle verschoben. Wir definieren nun den Rotverschiebungsparameter z:

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 = \frac{\nu_1}{\nu_0} - 1 = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1 \tag{10}$$

Wie hängt nun die Rotverschiebung mit dem Abstand einer Galaxie zusammen? Dazu entwickeln wir R(t) in eine Taylorreihe um t_0.

$$\begin{aligned} R(t) &= R(t_0) + c\dot{R}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}c^2\ddot{R}(t_0)(t-t_0)^2 + \dots \\ &= R(t_0)\left[1 + \frac{c\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}(t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{c^2\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)}(t-t_0)^2 + \dots\right] \\ &= R(t_0)\left[1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2 + \dots\right] \end{aligned} \tag{11}$$

Hier wurde die Hubble Konstante (3) und der Verzögerungsparameter q_0 eingeführt.

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}(t_0)R(t_0)}{\dot{R}(t_0)^2} \tag{12}$$

Dieser Parameter beschreibt die Rate, mit der sich die Expansion des Universums verlangsamt. Somit ergibt sich, wenn man (11) mit $t = t_1$ in (10) einsetzt für den Rotverschiebungsparameter

$$z \approx H_0(t_0 - t_1) + (1 + \frac{q_0}{2})H_0^2(t_0 - t_1)^2 \tag{13}$$

Wir wollen jedoch wissen, wie z vom Abstand D abhängt. Der heutige Abstand zwischen Emissions- und Absorptionsort ist

$$D = D(t_0) = R(t_0)\chi \approx c(t_0 - t_1) + \frac{H_0 c}{2}(t_0 - t_1)^2 \tag{14}$$

χ erhalten wir aus (6):

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t_0)} \left[1 - H_0(t - t_0) + \ldots\right] \approx \frac{c(t_0 - t_1)}{R(t_0)} + \frac{H_0 c(t_0 - t_1)^2}{2R(t_0)} \tag{15}$$

Nun haben wir die Rotverschiebung in Abhängigkeit des Abstands gefunden.

$$z \approx \frac{H_0}{c} D + \frac{(1 + q_0)H_0^2}{2c^2} D^2 \tag{16}$$

Es ist also möglich, daß die Rotverschiebung unendlich wird, wir also dieses Licht nicht mehr detektieren können. Es existiert ein Horizont über den wir nicht hinaussehen können. Um diesen Horizont bestimmen zu können, muss man jedoch ein Modell für den kosmologischen Skalenfaktor haben.

2.3 Olbert'sches Paradoxon

Im euklidischen Raum bedeutet Homogenität, daß der Raum unendlich ist, und überall die gleiche Sterndichte hat.
Die Anzahl der Sterne in einer Kugelschale mit Dicke dR um die Erde ist

$$\rho \cdot 4\pi R^2 dR$$

Die Anzahl der Sterne ist also direktoroportional zu R^2. Die Intensität eines Sterns nimmt aber mit R^{-2} ab. Uns erreicht also aus jeder Kugelschale die gleiche Energieflussdichte. Bei einem unendlichen Universum müssten wir in jeder Richtung einen Stern sehen, also der Himmel in der Nacht hell sein.
Eine Lösung des Paradoxons ist die Absorption von Licht durch interstellares Gas, aber dieses Gas würde sich solange aufheizen, bis es die gleiche Menge abstrahlt wie es absorbiert. Hat aber der Kosmos ein endliches Weltalter gibt es einen Welthorizont (2.2) der zu einer endlichen Anzahl sichtbarer Sterne führt und das Paradoxon löst.

3 Die Friedmann Gleichung

Wir leiten nun die Friedmanngleichung in Newton'scher Näherung her und untersuchen diese. Wir verwenden dabei die Annahmen unter Abschnitt 1.

3.1 Herleitung

Um die Friedmanngleichung zu bestimmen berechnen wir das Gravitationspotential und die kinetische Energie eines Teilchens. Wegen des kosmologischen Prinzips (1.1) ist das Teilchen beliebig wählbar. Von einem ebenfalls frei wählbarem Zentrum besitzt das Teilchen die Entfernung r. Das Teilchen erfährt laut dem Birkhoff'schen Theorem nur die Anziehungskraft der Masse innerhalb der Kugel mit Radius r.

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho rm \tag{17}$$

Das Teilchen besitzt also die potentielle Energie V

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{1}{3}4\pi G\rho r^2 m \tag{18}$$

Die kinetische Energie wird durch die Bewegung der Galaxien erzeugt.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \quad mit \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} \tag{19}$$

Die Gesamtenergie U ist konstant, muss aber nicht den selben Wert für jedes r haben.

$$U = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{3}4\pi G\rho r^2 m \tag{20}$$

Wir führen jetzt die mitbewegten Koordinaten (1) ein und erhalten

$$U = \frac{1}{2}m\dot{R}^2\chi^2 - \frac{1}{3}4\pi G\rho R^2\chi^2 m \tag{21}$$

Anstelle der zeitlichen Ableitung nach t schreiben wir wieder die Ableitung nach (ct).

$$\left(\frac{c\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} \quad mit \quad kc^2 = -\frac{2U}{m\chi^2} \tag{22}$$

Dies ist die Friedmanngleichung, die wir nur etwas umgeschrieben und um die kosmologische Konstante Λ erweitern werden.

3.2 Notwendiges aus der Allgemeine Relativitätstheorie

In der Allgemeinen Relativitätstheorie folgt die Friedmanngleichung wenn man die Robertson-Walker Metrik als Lösungsansatz für die Einsteinschen Feldgleichungen benutzt.
Als Einstein seine Feldgleichung aufstellte, war er von einem statischen Universum überzeugt. Allerdings kann ein materieerfülltes Universum ohne die Konstante nicht statisch sein, und so „erfand“ Einstein die kosmologische Konstante. Aktuelle Weltmodelle gehen von einer nichtverschwindenden kosmologischen Konstante aus, und interpretieren sie als Energiedichte des Vakuums.
Die Variable k beschreibt die Krümmung des Universums.

3.3 Einführung der kosmologischen Parameter

Mit Kosmologischer Konstante Λ (Abschnitt 3.2) lautet die Friedmanngleichung (22)

$$\left(\frac{c\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{23}$$

Wir führen nun die dimensionslosen Variablen

$$x(\tau) = \frac{R(t)}{R(t_0)} \quad und \quad \tau = H_0 t \tag{24}$$

und die kosmologischen Parameter

$$\Omega_m = \frac{\rho_{mat}(t_0)}{\rho_{kr}(t_0)} \tag{25}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \tag{26}$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2} \tag{27}$$

ein. Die Teilchenzahl ändert sich nicht, also ist $\rho_{mat}(t)R^3(t)$ für alle Zeiten konstant.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{R_0}\right)\frac{R_o}{R}\right]^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}\frac{H_0^2}{H_0^2} \\
\left[\frac{dx}{d\tau}\frac{H_0 R_o}{R}\right]^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} + \Omega_\Lambda H_0^2 \\
\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho\frac{R^2 R}{H_0^2 R_0^2 R} - \frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2} + \Omega_\Lambda x^2 \\
\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho_0\frac{R_0}{H_0^2 R} + \Omega_k + \Omega_\Lambda x^2 \\
\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 &= \frac{\rho_0}{\rho_{kr}(t_0)}\frac{1}{x} + \Omega_k + \Omega_\Lambda x^2
\end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich

$$\boxed{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{\Omega_m}{x} + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_k} \tag{28}$$

Heute ($t = t_0$) gilt

$$x(t_0) = 1 \quad \tfrac{dx}{d\tau}|_{t=t_0} = \tfrac{1}{H_0}\left(\tfrac{c\dot{R}_0}{R_0}\right) = 1 \tag{29}$$

Eingesetzt in (28) erhalten wir

$$1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k \tag{30}$$

4 Lösungen für ebenes Universum

In einem ebenen Universum verschwindet die Krümmung des Raumes. Die Friedmann Gleichung (28) lautet also

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{\Omega_m}{x} + \Omega_\Lambda x^2 \tag{31}$$

4.1 $\Omega_\Lambda = 0$

Dies vereinfacht Gleichung (31) sehr.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 &= \frac{\Omega_m}{x} \\
\frac{dx}{d\tau} &= \sqrt{\frac{\Omega_m}{x}} \\
\sqrt{x}dx &= \sqrt{\Omega_m}d\tau \\
\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} &= \sqrt{\Omega_m}\tau
\end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir schließlich:

$$x(\tau) = \left(\frac{9}{4}\Omega_m\right)^{\frac{1}{3}} \tau^{\frac{2}{3}} \tag{32}$$

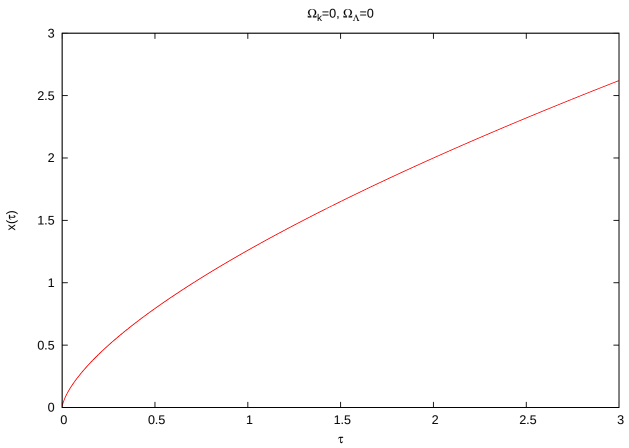


Abbildung 3: Zeitabhängigkeit des kosmischen Skalenfaktors ohne Raumkrümmung und verschwindender kosmologischer Konstante

Dieses Lösung nennt man Einstein-de Sitter-Universum, es zeichnet sich durch eine unendliche, langsamer werdende Expansion aus.

4.2 $\Omega_\Lambda > 0$

Um den Fall mit positivem Ω_Λ zu berechnen führen wir folgende Substitution durch:

$$u \equiv \frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m}x^3 \rightarrow \dot{u} = \frac{6\Omega_\Lambda}{\Omega_m}x^2\dot{x} \tag{33}$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung (31) ein, erhält man

$$\begin{aligned}
\dot{u}^2 &= \frac{36\Omega_\Lambda^2 x^2}{\Omega_m^2}\left(\frac{18\Omega_m}{x} + \Omega_\Lambda x^2\right) \\
&= 9\Omega_\Lambda\left(2u + u^2\right)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{du}{d\tau} = 3\sqrt{\Omega_\Lambda}\sqrt{u^2+u}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau d\tau 3\sqrt{\Omega_\Lambda} &= \int_0^u du' \frac{1}{\sqrt{u'^2+2u'}} \\
3\sqrt{\Omega_\Lambda}\tau &= \ln\left(2\sqrt{u^2+2u}+2u+2\right) - \ln(2) \\
&= \ln\left(\sqrt{u^2+2u}+u+1\right) \\
&= arccosh(u+1)
\end{aligned}$$

Uns somit lautet der dimensionslose kosmische Skalenfaktor

$$x(\tau) = \left\{\frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda}\left[\cosh(3\sqrt{\Omega_\Lambda}\tau)-1\right]\right\}^{\frac{1}{3}} \tag{34}$$

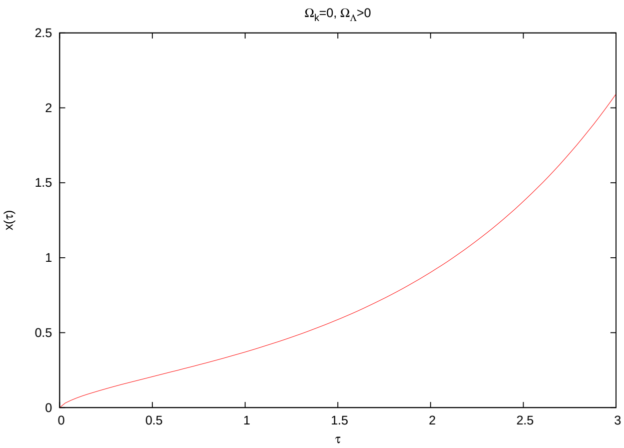


Abbildung 4: Zeitabhängigkeit des kosmischen Skalenfaktors ohne Raumkrümmung mit positiver kosmologischer Konstante

4.3 $\Omega_\Lambda < 0$

Bei einer negativen kosmologischen Konstanten wählen wir eine andere Substitution:

$$u \equiv -\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m}x^3 \tag{35}$$

Nach Einsetzen in die Gleichung (31) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\tau} &= 3\sqrt{-\Omega_\Lambda}\sqrt{2u-u^2} \\
3\sqrt{-\Omega_\Lambda}\tau &= \int_0^u \frac{du\prime}{\sqrt{2u\prime - u\prime^2}} \\
&= -\arcsin(-u+1) + arcsin(1) = -\arcsin(-u+1) + \frac{\pi}{2} \\
&= -\arccos(-u+1)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
u &= 1-\cos(3\sqrt{-\Omega_\Lambda}\tau) \\
x(\tau) &= \left\{-\frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda}\left[1-\cos(3\sqrt{-\Omega_\Lambda}\tau)\right]\right\}^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

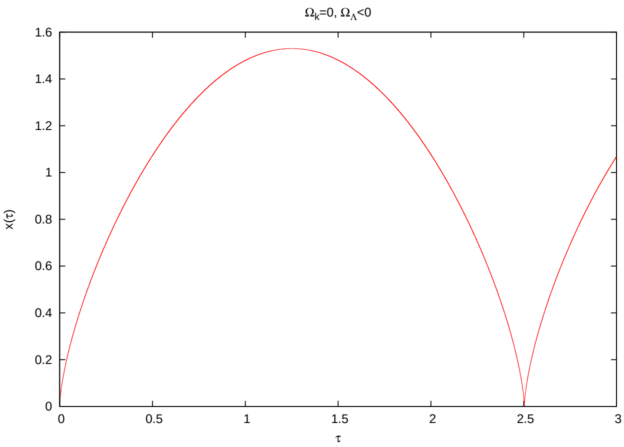


Abbildung 5: Zeitabhängigkeit des kosmischen Skalenfaktors ohne Raumkrümmung mit negativer kosmologischer Konstante

5 Zustand des Universums

5.1 Heutige Parameter

Durch Messungen erhalten wir drei unabhängige kosmologische Parameter:

$$
(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k) = (0.3, 0.7, 0) \tag{37}
$$

Daher beschreiben wir die Ausdehnung des Universums durch die Lösung der Friedmanngleichung aus Abschnitt 4.2.

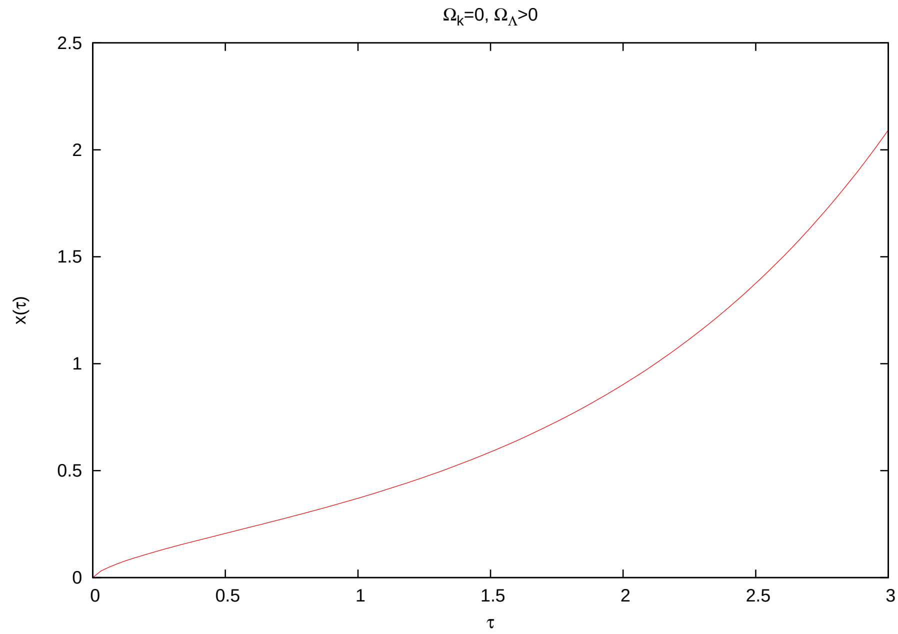


Abbildung 6: Zeitabhängigkeit des kosmischen Skalenfaktors ohne Raumkrümmung mit negativer kosmologischer Konstante

Heute wird das Universum durch den Ω_Λ-Term in der Friedmanngleichung (31) dominiert. Dies sieht man an der positiven Krümmung am Punkt x=1.
In der folgenden Betrachtung beziehen wir uns immer auf das, durch diese Parameter festgelegte, Universum.

5.2 Weltalter

Das Weltalter können wir nun direkt aus (34) berechnen, indem wir X gleich 0 setzen.

$$1 = \left\{ \frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda} \left[\cosh(3\sqrt{\Omega_\Lambda}\tau) - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{3}} \tag{38}$$

$$\rightarrow \tau = \frac{1}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} arcosh \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m} + 1 \right) \tag{39}$$

Damit erhalten wir für das Weltalter:

$$t = \frac{1}{H_0}\tau = 0,96 \cdot T_{Hubble} \tag{40}$$

Dies stimmt zufälligerweise fast mit der unter 2.1 berechneten Hubblezeit überein.

5.3 Welthorizont

Für $\tau \to 0$ geht auch $x(\tau) \to 0$. Licht, das und heute erreicht, kann also maximal von der Zeit $t_1 = 0$ bis t_0 unterwegs sein. Damit kann auch die Lichtquelle nur eine maximale Distanz D_0 entfernt sein. Es gibt also einen Horizont, über den wir nicht hinaussehen können.

$$\begin{aligned} D_0 &= R_0 \int_0^{t_0} d\chi = R_0 \int_0^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} && (41) \\ &= \frac{c}{H_0} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{x(\tau)} = 4 \cdot 10^{10} Lj && (42) \end{aligned}$$

Berechnen wir nun die Geschwindigkeit einer Galaxie, die sich am Welthorizont bewegt:

$$\begin{aligned} v(D_0) &= c\dot{R}_0 \chi = c\dot{R}_0 \int_0^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} && (43) \\ &= H_0 D_0 = 3,2c && (44) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist kein Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie, da die Lichtgeschwindigkeit nur in einem Inertialsystem eine Obergrenze ist. Der Stern und wir befinden uns aber nicht im gleichen Inertialsystem.
Die Minkowski Metrik kann nur lokal an unsere Metrik angenähert werden.

5.4 Der Urknall

Es gibt keinen Punkt an dem der Urknall stattfand. Man müsste sonst wie bei einer Explosion aus der Bewegung der Teilchen auf das Zentrum schließen können, das ist aber nicht möglich. Jeder Punkt im Universum ist gleichbedeutend. In unserem Modell mit verschwindender Krümmung gehen wir davon aus, daß das Universum schon immer unendlich ausgedehnt war. Es expandierte auch nicht in einen bestehenden Raum, sondern der Urknall erzeugte erst Raum und Zeit.

6 Das Horizontproblem

Mit Hilfe des dimensionslosen Skalenfaktors x, können wir unseren Welthorizont zu einer früheren Zeit t zurückskalieren.

$$D(t) = D_0 x = R(t) \int_0^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} \qquad (45)$$

Vergleichen wir dies mit dem Bereich des Universums, der zu diesem Zeitpunkt kausal mit uns verbunden war:

$$D_{kaus}(t) = R(t) \int_0^{t} \frac{cdt'}{R(t')}$$

Dieser Horizont ist kleiner, das heißt, der für uns sichtbare Bereich des Weltalls besteht aus Bereichen, die früher nicht kausal miteinander verbunden waren. Dies steht im Widerspruch zum statistischen Gleichgewicht der kosmischen Hintergrundstrahlung, das einen kausalen Zusammenhang voraussetzt.

Literatur

[1] Torsten Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie.* Spektrum, 2006.

[2] Wolfgang Gebhardt. *Kosmologie II.*

[3] Andrew Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology.* Wiley, 1998.

[4] Richard Powell. *An Atlas of The Universe.* `http://www.atlasoftheuniverse.com/`.