

Ausbildungsseminar Kerne und Sterne

Polytropen-Modelle
Verlauf von Temperatur und Dichte

Müller Martin am 24.04.2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Jacob Robert Emden	3
2	Polytrope Gaskugeln	4
2.1	Herleitung der Emdenschen Differentialgleichung	4
2.2	Lösungen der Emdenschen Differentialgleichung	6
2.3	Berechnung der Masse	8
2.4	Anwendung des Modells auf die Sonne	9
2.5	Verlauf von Temperatur und Dichte für den Polytropenindex $n=3$	9
3	Das Eddingtonsche Standard-Modell	11
3.1	Arthur Stanley Eddington	11
3.2	Herleitung des Polytropenindex $n=3$	12
3.3	Verlauf von Temperatur und Dichte mit Berücksichtigung des Strahlungsdrucks	12
4	Literatur	14

1 Einleitung

1.1 Jacob Robert Emden

Der Schweizer Physiker, Astrophysiker und Meteorologe Robert Emden wandte seine Forschungsergebnisse über Expansion und Kompression von Gaskugeln auf den Sternaufbau an. Hierbei war sein Werk *Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie (1907)* wegweisend, in dem er als erster die Ergebnisse der Thermodynamik auf die Untersuchung des inneren Aufbaus von Sternen anwandte.

Das Modell ermöglicht dann, Dichte, Druck und Temperatur in Abhängigkeit vom Sternradius zu bestimmen.

Robert Emden wurde 1862 in St. Gallen geboren. Im Jahr 1907 wurde er Assistenz Professor an der Technischen Universität in München. Also im selben Jahr, als er sein Buch *Gaskugeln* herausbrachte.

Seit 1920 war Emden ein Mitglied der „Bayerischen Akademie der Wissenschaften“. Er schrieb für die Fachzeitschrift „Zeitschrift für Astrophysik“, die im Jahre 1930 gegründet wurde. 1933 kehrte er in sein Heimatland zurück, als die Nationalsozialisten an die Macht kamen. Er starb 1940 in Zürich. Ebenso sei zu erwähnen, dass Emden der Onkel des bekannten Astrophysikers Martin Schwarzschild war.

2 Polytrope Gaskugeln

2.1 Herleitung der Emdenschen Differentialgleichung

Es wird jetzt ein Modell vorgestellt, welches einen konstanten Polytropenexponent γ voraussetzt. Das Modell ermöglicht dann, $\rho(r)$, $P(r)$ und (über die ideale Gasgleichung) $T(r)$ zu bestimmen. Allerdings müssen jetzt zwei Größen, M und R vorgegeben werden. Dazu gehen wir von Gleichung (2.1), der hydrostatischen Grundgleichung aus

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \quad (2.1)$$

dividieren durch $\frac{\rho}{r^2}$ und differenzieren anschließend noch einmal. Wir erhalten

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -G \frac{dM(r)}{dr} \quad (2.2)$$

Nach Einsetzen der Grundgleichung (2.3)

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (2.3)$$

und nachfolgender Division durch r^2 bekommen wir

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho \quad (2.4)$$

Setzt man das Gravitationspotential $\Phi(r)$ wie folgt an

$$\frac{d\Phi}{dr} = -g(r) \quad (2.5)$$

so wird aus der hydrostatischen Grundgleichung (2.1)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \quad (2.6)$$

und aus Gl.(2.4) die Poissongleichung für das Gravitationspotential $\Phi(r)$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -4\pi G\rho \quad (2.7)$$

oder

$$\Delta\Phi = -4\pi G\rho \quad (2.8)$$

wobei in Gl.(2.8) nur die Radialkomponente des Δ -Operators steht.
Die polytrophe Zustandsgleichung lautet

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (2.9)$$

und stellt eine Beziehung zwischen Druck und Dichte dar.

Wobei K als Polytropenkonstante und n als Polytropenindex bezeichnet wird.

Es gilt

$$n = \frac{1}{\gamma - 1} \quad (2.10)$$

Die Beziehung (2.9) gilt im ganzen Stern, d.h. K und n sind räumlich konstant.

Aus Gl. (2.9) gewinnen wir durch Differenzieren

$$-d\Phi = \frac{dP}{\rho} = K\gamma\rho^{\gamma-2}d\rho \quad (2.11)$$

und nach Integration

$$\Phi = -K\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} + C \quad (2.12)$$

Die Integrationskonstante wird durch den Wert von Φ an der Oberfläche des Sterns ($r=R$) festgelegt. Dort ist $\rho(R) = 0$ und deshalb auch $\Phi(R) = 0$. Die Konstante C verschwindet deshalb. Wir ersetzen noch γ durch den Polytropenindex n wodurch sich Gl.(2.12) einfacher schreiben läßt. Es wird

$$\frac{-\Phi}{(n+1)K} = \rho^{\frac{1}{n}} \quad (2.13)$$

Einsetzen von ρ in Gl.(2.7) ergibt

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} + 4\pi G\left(\frac{-\Phi}{(n+1)K}\right)^n = 0 \quad (2.14)$$

Diese Gleichung enthält nur noch das Gravitationspotential und ermöglicht damit eine selbstkonsistente Lösung des Problems. Außerdem hat über (2.11) und (2.9) auch die polytrophe Zustandsgleichung in die Differentialgleichung (2.14) Eingang gefunden.

Nach Substitution dimensionsloser Größen

$$x = Ar \quad (2.15)$$

$$y = \frac{\Phi}{\Phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.16)$$

ergibt sich die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + y^n = 0 \quad (2.17)$$

oder

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y^n = 0 \quad (2.18)$$

$\Phi(0) = \Phi_c$ und $\rho(0) = \rho_c$ sind die Werte im Zentrum des Sterns. Gl.(2.18) heißt **Emden-sche Differentialgleichung**. Sie wird mit den Randbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ gelöst und hat für $n \leq 5$ mindestens eine Nullstelle bei endlichen Werten von $x = x_n$, welche man mit den Sternradius R identifiziert

$$x_n = Ar \tag{2.19}$$

Der Radius einer Polytrope entspricht der ersten Nullstelle der entsprechenden Lane-Emden-Fkt. $y(x_n) = 0$. Dies lässt sich in der Form

$$R = \frac{x_n}{A} = \left[\frac{K(n+1)\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}} x_n \tag{2.20}$$

darstellen.

Durch Einsetzen von $x = Ar$ und $y = \frac{\Phi}{\Phi_c}$ in die Differentialgleichung (2.18) erhält man

$$A = \left(\frac{4\pi G}{(n+1)K} \right)^{\frac{1}{2}} \rho_c^{\frac{n-1}{2n}} \tag{2.21}$$

2.2 Lösungen der Emdenschen Differentialgleichung

Die Emden-Dgl. hat bei $x=0$ eine reguläre Singularität. Um das Verhalten der Lösungen dort zu verstehen, entwickeln wir in eine Potenzreihe

$$y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \tag{2.22}$$

mit $a_1 = y'(0)$, $2a_2 = y''(0)$, Da die Gravitationsbeschleunigung $|g| = d\Phi/dr \sim dy/dx$ im Zentrum verschwinden muss, ergibt sich $a_1 = 0$. Einsetzen in die Gl.(2.18) und Koeffizientenvergleich liefert eine Potenzreihe folgender Form

$$y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{n}{120}x^4 + \dots \tag{2.23}$$

Für den Polytropenindex $n=0,1$ und 3 lässt sich diese Potenzreihe analytisch lösen. Man kommt auf folgende Lösungen

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad y(x) = 1 - \frac{x^2}{6} \\ n = 1 & \quad y(x) = \sin x/x \\ n = 5 & \quad y(x) = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Andere Lösungen müssen numerisch bestimmt werden.

Die nachfolgende Tabelle zeigt die berechneten Werte, die von Chandrasekhar, im Jahre 1939, grafisch ermittelt wurden .

n	z_n	$\left(-z^2 \frac{dw}{dz}\right)_{z=z_n}$	e_c/\bar{e}
0	2.4494	4.8988	1.0000
1	3.14159	3.14159	3.28987
1.5	3.65375	2.71406	5.99071
2	4.35287	2.41105	11.40254
3	6.89685	2.01824	54.1825
4	14.97155	1.79723	622.408
4.5	31.8365	1.73780	6189.47
5	∞	1.73205	∞

Tab.1.1 Numerische Werte für polytropen Modelle mit Index n

Für den speziellen Fall sind die Graphen mit Polytropenindex $n=3$ und $n=1.5$ dargestellt.

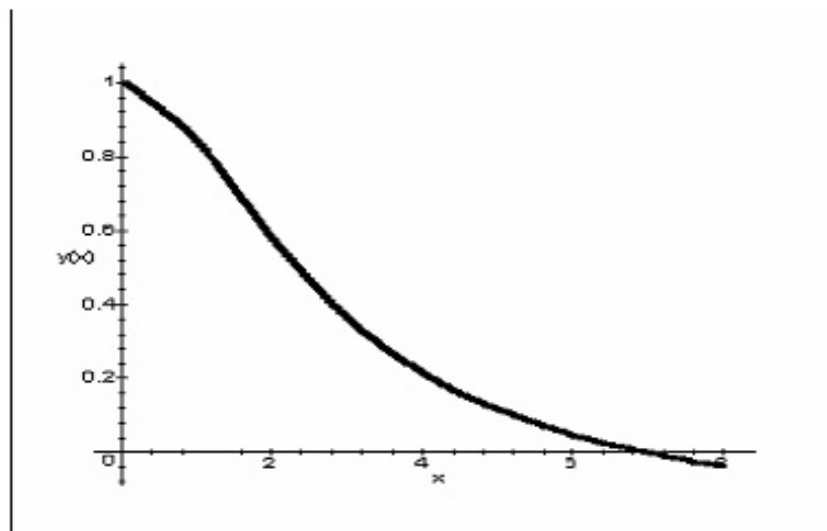


Abb.2.1 Lösung der Emdenschen Dgl. für den Polytropenindex $n=3$

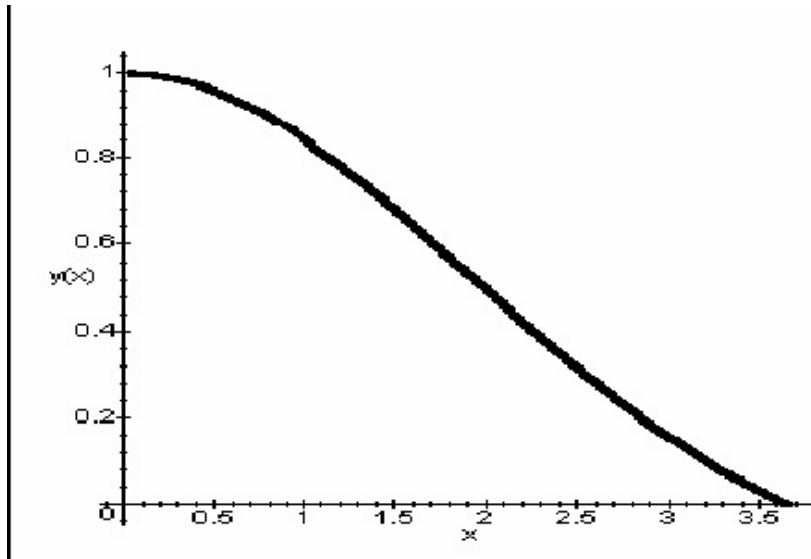


Abb.2.2 Lösung der Emdenschen Dgl. für den Polytropenindex $n=1.5$

2.3 Berechnung der Masse

Für die Masse M gilt die einfache Beziehung

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr \quad (2.25)$$

Durch Einsetzen der dimensionslosen Größen Gl.(2.15) und Gl.(2.16) folgt

$$M = 4\pi \rho_c \int_0^r y^n r^2 dr = -4\pi \frac{\rho_c}{A^3} \int_0^{x_0} x^2 y^n(x) dx \quad (2.26)$$

Anschließend wird die Emdensche Dgl. in Gl.(2.26) eingesetzt

$$M = -4\pi \frac{\rho_c}{A^3} \int_0^{x_0} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) dx \quad (2.27)$$

und darauf setzt man Gl.(2.21) ein. Dies führt auf

$$M = -4\pi \frac{\rho_c}{A^3} x^2 \frac{dy}{dx} \Big|_{x_n} = 4\pi \rho_c R^3 \left(-\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_n} \quad (2.28)$$

bzw. auf

$$M = -4\pi \left[\frac{K(n+1)}{4\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} \rho_c^{(3-n)/2n} x_n^2 y'(x_n) \quad (2.29)$$

Als besonderes Ergebnis erhält man für eine Polytrope $n=3$, dass die Masse nicht von der zentralen Dichte abhängig ist.

$$M_3 = 4\pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \left[-x^2 y'(x) \right]_{n=3} \quad (2.30)$$

Weiter lässt sich durch einfaches Umstellen eine Masse-Radius Beziehung herleiten.

$$R^{3-n} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{K(n+1)}{G} \right]^n \left[-x^{\frac{n+1}{n-1}} y'(x) \right]^{n-1} M^{1-n} \quad (2.31)$$

Man sieht als Ergebnis, dass für $n=1$ die Masse unabhängig vom Sternradius ist und für $n=3$ der Radius des Sterns unabhängig von der Sternmasse ist.

2.4 Anwendung des Modells auf die Sonne

Ausgangspunkt sind die bekannten Werte der Sonne

$$\begin{aligned} M &= 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\ R &= 6,96 \cdot 10^8 \text{ m} \\ \bar{\rho} &= 1,41 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ebenso verwendet man einen konstanten Polytropenindex $n=3$, da dieser, wie sich später herausstellen wird, eine gute Näherung für den Strahlungstransport darstellt.

Aus der Tabelle (1.1) entnimmt man den Wert $x_3 = 6,897$. Ebenso ergibt sich aus der Tabelle für die Dichte im Sternzentrum $\rho_c = 76,39 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ und für die Konstante $A = \frac{x_3}{R} = 9,91 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1}$.

Umstellen der Gleichung (2.19) und Einsetzen von A führt auf den Vorfaktor der Polytropengleichung.

$$K = \frac{\pi G}{A^2} \rho_c^{\frac{2}{3}} = 3,85 \cdot 10^9 \quad (2.33)$$

Daraus ergibt sich der Druck für $n = 3$ im Sterninneren zu

$$P_c = K \rho_c^{\frac{4}{3}} = 1,24 \cdot 10^{16} \text{ Pa} \quad (2.34)$$

Nimmt man nun für die Zusammensetzung des Gases $X \approx 0,7$ und $Y \approx 0,3$ an, so ergibt sich für die kmol-Masse $\mu = 0,62$.

Mit Hilfe der idealen Gasgleichung beträgt die Temperatur im Sonnenzentrum

$$T_c = P_c \frac{\mu}{R \rho_c} = 1,2 \cdot 10^7 \text{ K} \quad (2.35)$$

Das Modell der polytropen Gaskugel erreicht fast die Werte der Computerdaten (siehe Abb. (2.3)) und ist eine bessere Abschätzung, als sie im Vortrag „Grundgleichungen des Sternenaufbaus“ angegeben wurden. Es kann damit zweifellos für bessere Näherungen benutzt werden.

2.5 Verlauf von Temperatur und Dichte für den Polytropenindex $n=3$

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch untersuchen, inwieweit ein konstanter Polytropenindex zutrifft. Dazu vergleicht man in einer doppelt logarithmischen Auftragung T gegen ρ das sogenannte Standardmodell ($n=3$) mit dem Computermodell für die

Sonne zur Zeit des Beginns der Zeit auf der Hauptreihe (ZAMS).
Für die Temperatur-Dichte-Beziehung gilt

$$T(r) \propto \rho(r)^{\frac{1}{n}} \quad (2.36)$$

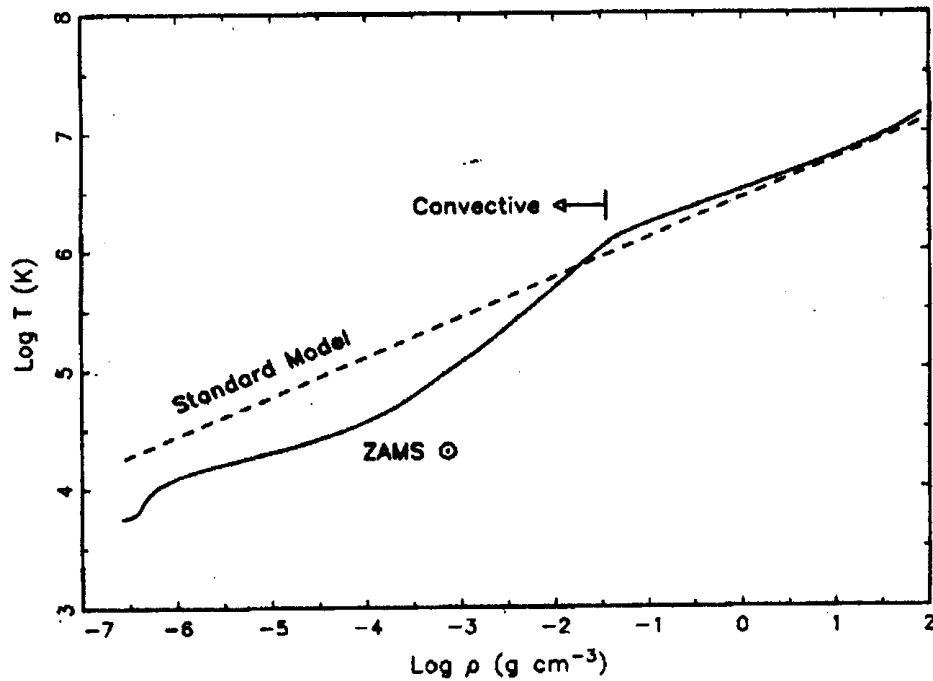


Abb.2.3 Doppelt logarithmische Auftragung von T gegen ρ . Die Steigung ist $1/n$.

Für die inneren Bereiche des Sterns ist die Steigung $1/3$ (Standardmodell) recht gut erfüllt und die Abweichung des Computermodells (zero age main sequence) sind klein. Für Dichten kleiner als $\rho = 0,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (konvektiver Teil) ist die Anpassung schlecht. Ein Modell mit $n=3/2$ würde hier eine bessere Anpassung an die exakten Werte liefern. Das Modell $n=3$ ist das Eddingtonsche Standardmodell, welches im nächsten Kapitel behandelt wird. Es setzt voraus, dass β , der Anteil des Gasdrucks am Gesamtdruck, im gesamten Sternenvolumen konstant ist.

3 Das Eddingtonsche Standard-Modell

3.1 Arthur Stanley Eddington



Abb.3.1 Sir Arthur Stanley Eddington (Geb. 28. Dezember 1882 in Kendal; Gest. 22. November 1944 in Cambridge)

1926, zu einer Zeit also, da in der Physik die Grundlagen zur Quantentheorie erst gelegt wurden, erschien Eddingtons Buch „The Internal Structure of Stars“. Geschrieben noch in der Zeit vor der Quantentheorie war es ein Meilenstein auf dem Weg zu einem physikalischen Verständnis und einer quantitativen Beschreibung der Sterne. Arthur Stanley Eddington (1882-1944) hatte zu dieser Zeit einen der beiden Lehrstühle für Astronomie in Cambridge, war seit 1913 „Plumian Professor of Astronomy“ und Nachfolger von George Darwin, einem Sohn von Charles Darwin. In seiner Theorie des inneren Aufbaus der Sterne greift Eddington auf Emdens Theorie der polytropen Gaskugeln zurück, die dieser in einem am Anfang des 20. Jahrhunderts erschienenen Buchs beschrieben hatte. Eddington baute den Strahlungsdruck in sein Modell ein und gelangte so zu der Polytropen $n=3$.

Eddington gehörte zu den ersten Physikern, die die Bedeutung von Einsteins Relativitätstheorie erkannten. Er leitete die Sonnenfinsternis-Expedition auf die Vulkaninsel Principe im Golf von Guinea in Westafrika, bei der am 29. Mai 1919 nachgewiesen werden konnte, dass - wie von der allgemeinen Relativitätstheorie postuliert - Licht von großen Massen abgelenkt wird.

3.2 Herleitung des Polytropenindex n=3

Der Gasdruck lässt sich schreiben als

$$P_g = \frac{\rho}{\mu} \tilde{R}T \quad (3.1)$$

und der Strahlungsdruck ergibt sich zu

$$P_r = \frac{1}{3}u(T) = \frac{1}{3}aT^4 \quad (3.2)$$

wobei $u(T)$ die Energiedichte und a eine Konstante mit dem Wert $a = 7,57 \cdot 10^{-16} \text{Jm}^{-3} \text{K}^{-4}$ ist.

Dies führt zu dem Ausdruck für den Gesamtdruck im Stern.

$$P = P_g + P_r = \frac{1}{\beta}P_g = \frac{1}{1-\beta}P_r \quad (3.3)$$

Als β wird der Anteil des Gasdrucks am Gesamtdruck bezeichnet.

Einsetzen von (3.1) und (3.2) in (3.3) und Umstellen nach T ergibt die Gleichung (3.4).

$$T = \left[\frac{3\tilde{R}(1-\beta)}{a\mu\beta} \right]^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} \quad (3.4)$$

Zu beachten ist noch, dass β über den ganzen Stern konstant ist.

Einsetzen in die Gl.(3.3) führt auf die Polytropengleichung

$$P = K\rho^{\frac{4}{3}} \quad (3.5)$$

mit

$$K = \left(\frac{3\tilde{R}^4(1-\beta)}{a\mu^4\beta^4} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.6)$$

In Gleichung (3.5) zeigt sich deutlich der Polytropenindex n=3 als Resultat.

3.3 Verlauf von Temperatur und Dichte mit Berücksichtigung des Strahlungsdrucks

Aus Gl. (2.21) und (2.28) ergibt sich ein anderer Ausdruck für K

$$K = \frac{(4\pi)^{\frac{1}{3}} G}{4} M^{\frac{2}{3}} \left[x^4 \left(\frac{dy}{yx} \right)^2 \right]_{x=x_3}^{-\frac{1}{3}} \quad (3.7)$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke Gl.(3.6) und Gl.(3.7) erhalten wir eine algebraische Gleichung 4. Ordnung für β

$$\frac{1-\beta}{\beta^4} = C_1 \mu^4 \left(\frac{M}{M_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.8)$$

Die Konstante berechnet man über (2.15) und (2.18) und kommt auf

$$C_n = 4\pi \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \right)_{x_n} \cdot x_n^3 \left(\frac{n+1}{4\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} K^{\frac{3}{2}} \quad (3.9)$$

Für die Konstante C_1 ergibt sich der Wert von $C_1 = 0,002996$.

Wir können dann mit Gl.(3.4) noch eine weitere Beziehung zwischen Temperatur und Dichte, wie in Gl. (2.36) herstellen. Wir setzen dazu Gl. (3.12) in Gl.(3.4) ein. Damit wird dann

$$T(r) = C_2 \beta \mu \left(\frac{M}{M_0} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}(r) \quad (3.10)$$

mit $C_2 = 4,62 \cdot 10^6$.

Damit verhält sich die Temperatur im Stern ähnlich wie das Gravitationspotential. Es lässt sich schließlich zeigen, dass die Annahme einer Konstanz von β gleichbedeutend ist mit einer räumlichen Mittelung über Opazität κ . Die Ableitung findet sich z.B. in D. Prialnik, *Stellar Structure and Evolution*. Cambridge Univ. Press 2000. Macht man unter dieser Annahme noch Gebrauch von der Transportgleichung und benutzt die Gleichung für den Gesamtdruck, so findet man für die Leuchtkraft

$$L = \frac{4\pi c G M}{\bar{\kappa}} (1 - \beta) = L_{Edd} (1 - \beta) \quad (3.11)$$

Für den Grenzfall $\beta = 0$, d.h. Gesamtdruck=Strahlungsdruck, wird $L = L_{Edd}$. Es wird dann eine maximale Leuchtkraft erreicht, die **Eddington-Leuchtkraft**, wobei der Strahlungsdruck gerade den Gravitationsdruck kompensiert. Eine größere Leuchtkraft würde zu Massenverlusten führen. Wenn wir $(1 - \beta)$ mit Gl.(3.8) eliminieren, erhalten wir das Masse-Leuchtkraftgesetz in der Form

$$\frac{L}{L_0} = 0,003 \cdot \frac{4\pi c G M_0}{\bar{\kappa} L_0} \mu^4 \beta^4 \left(\frac{M}{M_0} \right)^3 \quad (3.12)$$

Zu Beachten ist, dass β noch eine Funktion der Sternmasse und der Kmol-Masse. Für β finden wir bei numerischer Auswertung von Gl.(3.8) folgende Werte

$\frac{M}{M_0} \mu^2$	1,0	2,0	5,0	10,0	50,0
β	0,9970	0,9885	0,9412	0,8463	0,5066

Abb.3.1 β der Anteil des Gasdrucks am Gesamtdruck für verschiedene Massen nach dem Standardmodell

Setzen wir z.B. die Kmol-Masse mit $\mu = 0,62$ an, so ergibt sich aus Abb.3.1, dass bei 19 Sonnenmassen der Strahlungsdruck im Mittel schon die Hälfte des Gesamtdrucks ausmacht.

4 Literatur

- [1] W.Gebhard: Sternenaufbau und Entwicklung. Skript der Vorlesung WS 01/02
- [2] R.Kippenhahn, A. Weigert: Stellar Structure and Evolution Springer Verl. 1990, corr. Printing 1991
- [3] Internet:<http://mathworld.wolfram.com/Lane-EmdenDifferentialEquation.html>
- [4] W. Demtröder Experimentalphysik 4; 2.Auflage Springer
- [5] Internet:<http://en.wikipedia.org/wiki/RobertEmden>