

Die Robertson-Walker Metrik

Ausbildungsseminar Astroteilchenphysik

Naturwissenschaftliche Fakultät II - Physik

Universität Regensburg



Inhaltsverzeichnis

1	ART in Kürze	1
1.1	Koordinaten & Koordinatentrafo	1
1.2	Der metrische Tensor	1
1.3	Die kovariante Ableitung	2
1.4	Riemann- & Ricci-Tensor	3
1.5	Einstein-Tensor & Einsteingleichung	4
1.6	Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld	4
2	Die Robertson-Walker Metrik	5
2.1	Das kosmologische Prinzip	5
2.2	Herleitung der Robertson-Walker Metrik	5
2.3	Geometrische Analogien & Eigenschaften	7
3	Ein paar Abstandsbegriffe	10
4	Literaturverzeichnis	12

1 ART in Kürze¹

Die ART wird in einem 4 dimensionalen Riemann'schen Raum formuliert. Dieser unterscheidet sich von einem euklidischen Raum hauptsächlich durch seine ortsabhängige Metrik. Sie enthält in der ART die gesamte Information über das Gravitationsfeld. Man kann sich den Riemann'schen Raum als eine 4 dimensionale Mannigfaltigkeit eingebettet in einen höherdimensionalen \mathbb{R}^n vorstellen. Im folgenden gilt die Summenkonvention und die abkürzende Schreibweise $A^\mu_{,\nu} := \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}$ für die Ableitung. Außerdem sei $c = 1$.

1.1 Koordinaten & Koordinatentrafo

Man parametrisiert den Riemann'schen Raum mit dem Koordinatensystem x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), wobei mehrere Karten nötig sein können um den gesamten Raum abzudecken. Unter einer Koordinatentrafo

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

transformieren Kontra- & Kovariante Vektorfelder (A^μ , B_μ) wie folgt:

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (1a)$$

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \quad (1b)$$

Gemischten Tensoren transformieren in den einzelnen Indizes wie oben.

1.2 Der metrische Tensor

Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ bestimmt das Quadrat des Raumzeitintervalls ds^2 zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten x^μ und $x^\mu + dx^\mu$ folgendermaßen:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

Es gilt offenbar $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Der kovariante metrische Tensor wird definiert durch

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda \quad (3)$$

¹P. A. M. Dirac & J. N. Islam

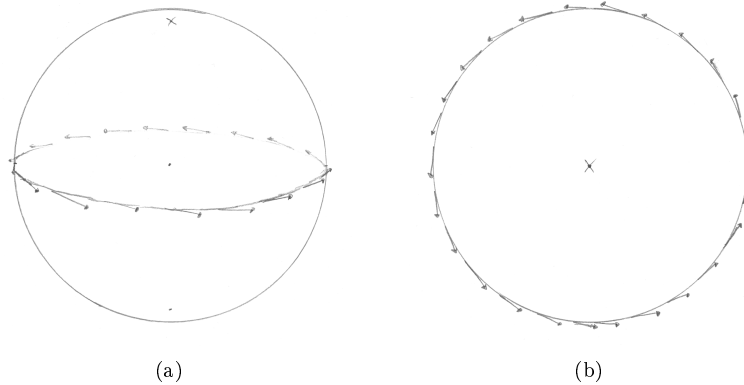


Abbildung 1: Die Änderung von einem Vektor zum nächsten ist kein Element des Tangentialraumes

Diese Tensoren führen außerdem ko- in kontravariante Vektoren über und umgekehrt:

$$A^\mu = g^{\nu\lambda} A_\lambda \quad (4a)$$

$$A_\mu = g_{\nu\lambda} A^\lambda \quad (4b)$$

Lokal kann man die Koordinaten immer so wählen, dass sich die Metrik in diesen zu einer Minkowski-Metrik reduziert.

1.3 Die kovariante Ableitung²

Ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit ist so definiert, dass jedem Punkt auf der Mannigfaltigkeit ein Vektor aus dem Tangentialraum (an diesem Punkt) zugeordnet wird. Betrachtet man nun den Gradienten eines solchen Vektorfeldes, dann liegt das Gradientenfeld im Allgemeinen nicht mehr im Tangentialraum. Man definiert nun die kovariante Ableitung so, dass das Gradientenfeld wieder in den Tangentialraum projiziert wird:

$$A^\mu_{;\nu} := A^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda \quad (5a)$$

$$A_{\mu;\nu} := A_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \quad (5b)$$

$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ heißt Christoffelsymbol. Für sie gilt $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ und sie sind keine Tensoren. Sie werden durch die Metrik definiert:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} := \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) \quad (6)$$

²T. Fließbach, S. 99ff

Bei der kovarianten Ableitung von Tensoren höherer Stufe muss man je Index den entsprechenden Γ -Term anhängen. Durch eine einfache Rechnung (einfach einsetzen und ausrechnen) lässt sich zeigen, dass die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad (7a)$$

$$g^{\mu\nu}_{;\lambda} = 0 \quad (7b)$$

Damit gilt auch innerhalb der kovarianten Ableitung

$$g_{\mu\lambda}A_{;\nu}^{\lambda} = A_{\mu;\nu} \quad (8a)$$

$$g^{\mu\lambda}A_{\lambda;\nu} = A_{;\nu}^{\mu} \quad (8b)$$

1.4 Riemann- & Ricci-Tensor

Im Gegensatz zur partiellen Ableitung vertauschen zwei kovariante Ableitungen im Allgemeinen nicht mehr. Deshalb definiert man über

$$A_{\mu[\nu;\lambda]} := A_{\mu;\nu;\lambda} - A_{\mu;\lambda;\nu} = A_{\sigma}R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda} \quad (9)$$

den Riemann-Tensor $R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda}$. Er lässt sich schreiben als:

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda} := \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \quad (10)$$

Man kann zeigen, dass der Riemann Tensor folgende Symmetrieeigenschaften hat:

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} = -R_{\mu\sigma\nu\lambda} = -R_{\mu\sigma\lambda\nu} \quad (11a)$$

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\sigma\mu} \quad (11b)$$

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\sigma\lambda\mu\nu} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} = 0 \quad (11c)$$

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda;\rho} + R^{\sigma}_{\mu\rho\nu;\lambda} + R^{\sigma}_{\mu\lambda\rho;\nu} = 0 \text{ (Bianchi-Identität)} \quad (12)$$

Der Ricci-Tensor wird nun definiert als

$$R_{\mu\nu} := R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} \stackrel{Gl.10}{=} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \quad (13)$$

Definiert man zusätzlich $\sqrt{g} := \sqrt{-\det(g)}$, dann gilt außerdem

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}[\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\sqrt{g}] - [ln\sqrt{g}]_{,\mu,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \quad (14a)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = [ln\sqrt{g}]_{,\mu} \quad (14b)$$

Aus Gl. 14a folgt $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Man definiert nun die skalare Krümmung (bzw. den Ricci-Skalar) als die Spur des Ricci-Tensors:

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} \quad (15)$$

1.5 Einstein-Tensor & Einsteingleichung

Man definiert nun den Einstein-Tensor als

$$G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad (16)$$

Die Einsteingleichung lautet dann wie folgt:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (17)$$

wobei G die newtonsche Gravitationskonstante und $T_{\mu\nu}$ den Energie-Impulstensor bezeichnet. Über diese Gleichung kann man nun also im Prinzip die Metrik unseres Raumes aus der (Massen/)Energie- und Impulsverteilung berechnen. Das Hauptproblem dabei ist, dass das Gravitationsfeld selbst Energie trägt und damit auch zum Energie-Impulstensor beiträgt. Mittels Gl. 12 kann man zeigen, dass $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ und dementsprechend $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ ist. Letztere Gleichung entspricht der Energie-Impuls-Erhaltung.

1.6 Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld

Wir betrachten nun eine (in ihren Komponenten) differenzierbare Kurve $x^\mu(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), wobei der Tangentenvektor $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ wie ein kontravarianter Vektor transformiert. Betrachtet man nun ein Vektorfeld Y^μ , dann spricht man von einem Paralleltransport entlang der Kurve, wenn gilt

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} Y^\mu_{;\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \stackrel{\text{Gl. 5a}}{=} Y^\mu_{;\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} Y^\sigma \frac{dx^\nu}{d\lambda} \\ &= \frac{dY^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} Y^\sigma \frac{dx^\nu}{d\lambda} \end{aligned} \quad (18)$$

Eine Kurve heißt Geodäte, wenn ihre Tangente immer parallel zu ihr transportiert wird, wenn sie also innerhalb unserer Raum-Zeit immer gerade verläuft. Dementsprechend folgen Massen, die außer der Gravitation keine weitere Kraft spüren immer solchen Geodäten. Um die Geodäten-/Bewegungsgleichung zu erhalten, setzen wir also $Y^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (19)$$

Ist der Tangentenvektor $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ für alle λ zeitartig, dann kann man den Weg auch durch die Eigenzeit parametrisieren.

2 Die Robertson-Walker Metrik

2.1 Das kosmologische Prinzip³

Wie wir wissen, ist die Materie im Weltall nicht gleich verteilt, sondern hauptsächlich auf Sterne konzentriert. Diese bündeln sich wiederum zu Galaxien und Galaxienhaufen. „Bei der Betrachtung des Weltalls in „großen Maßstäben“ hat man jedoch von diesen „örtlichen“ Inhomogenitäten zu abstrahieren, ...“⁴

Der (für uns) sichtbare Teil des Universum hat einen Radius von ca. 10^{10} Lichtjahren (Lj). Wir beobachten auf einer Skala von ca. 10^8 Lj (Ausdehnung von Galaxienhaufen ca. 10^7 Lj) eine homogene Verteilung der Galaxien. Außerdem sind die Galaxien um uns herum isotrop verteilt. Fordert bzw. postuliert man nun Homogenität und Isotropie für den gesamten Raum (auch bekannt als kosmologisches Prinzip), dann bedeutet dies, dass man eine sogenannte Weltzeit wählen kann, in der die Metrik des Raumes in allen Punkten und Richtungen zu jedem Zeitpunkt dieselbe ist. Man erhält also eine Metrik der Form

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j \quad (20)$$

2.2 Herleitung der Robertson-Walker Metrik

Wir betrachten nun zunächst allein die Metrik des (3 dimensionalen) Raumes und vernachlässigen die Zeitabhängigkeit (Zur Verdeutlichung werden lateinischen Indizes (i,j,k,... = 1,2,3) verwendet). Wir schreiben die Metrik in der Form

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (21)$$

Die Krümmung des Raumes wird vollständig durch den Krümmungstensor R_{ijkl} bestimmt, der im Fall vollständiger Isotropie allein durch den metrischen Tensor g_{ij} bestimmt ist und folgende Form hat:⁵

$$R_{ijkl} = \lambda(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (22)$$

Für den Ricci-Tensor erhält man dann

$$R_{jl} = g^{ik} R_{ijkl} = \lambda(g^{ik} g_{ik} g_{jl} - g^{ik} g_{il} g_{jk}) = \lambda(3g_{jl} - g_l^k g_{jk}) = 2\lambda g_{jl} \quad (23)$$

³L. D. Landau & T. Fließbach

⁴L. D. Landau, S. 427

⁵für den mathematischen Beweis vgl. L. P. Eisenhart

und für die skalare Krümmung

$$K = 2\lambda g^{jl} g_{jl} = 6\lambda \quad (24)$$

Die Krümmung des isotropen Raumes wird also alleine durch die Konstante λ bestimmt (Es sei darauf hingewiesen, dass λ nur räumlich und nicht zeitlich konstant ist). Man kann nun beweisen, dass sich eine Metrik mit der Eigenschaft (22) immer folgendermaßen schreiben lässt:⁶

$$dt^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{[1 + \frac{\lambda}{4}(x^2 + y^2 + z^2)]^2} = \dots$$

→ Kugelkoordinaten

$$\dots = \frac{dr'^2 + r'^2 \overbrace{(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)}{:=d\Omega^2}}{[1 + \frac{\lambda}{4}r'^2]^2} = \dots$$

- $r' = \frac{r''}{1 + \frac{\lambda}{4}r''^2}$
- $\lambda(t) = \frac{k}{R(t)^2}$ mit $k = +1, 0, -1$

$$\dots = \frac{dr'^2}{1 - \frac{k}{R(t)^2}r'^2} + r'^2 d\Omega^2 = \dots$$

- $r = \frac{r'}{R(t)}$

$$\dots = R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

Setzt man dies nun in Gl. 20 ein, so erhält man die Standardform der Robertson-Walker Metrik:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (25)$$

Man kann also im wesentlichen 3 Fälle unterscheiden:

- $k = +1$: der Raum konstanter, positiver Krümmung ($r \in [0, 1[$)
- $k = 0$: der Raum verschwindender Krümmung (euklidischer Raum, $r \in [0, \infty[$)

⁶vgl. L. P. Eisenhart

- $k = -1$: der Raum konstanter, negativer Krümmung ($r \in [0, \infty[$)

Mit folgender Substitution in Gl. 25

$$r = f(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) & \text{für } k = 1 \\ \chi & \text{für } k = 0 \\ \sinh(\chi) & \text{für } k = -1 \end{cases} \quad (26)$$

erhält man eine weitere nützliche Form der Metrik:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[d\chi^2 + f^2(\chi)d\Omega^2] \quad (27)$$

mit

$$\chi \in \begin{cases} [0, \pi] & \text{für } k = 1 \\ [0, \infty[& \text{für } k = 0 \\ [0, \infty[& \text{für } k = -1 \end{cases}$$

Die Koordinate χ misst die Entfernung zum Koordinatenursprung ($R(t)\chi$). Man sieht (bzw. rechnet leicht nach), dass die Transformation $R \rightarrow -iR$ und $\chi \rightarrow i\chi$ gerade die Fälle $k = +1$ und $k = -1$ ineinander überführt. Hat man also eine Größe für den Fall $k = +1$ berechnet erhält man den Fall $k = -1$ (bis auf eventuelle Vorzeichenfehler) umsonst dazu.

2.3 Geometrische Analogien & Eigenschaften

Um eine Vorstellung von einem Universum mit konstanter, von Null verschiedener Krümmung zu erhalten, ist obige Herleitung nicht unbedingt geeignet, sondern es ist bequemer auf geometrische Analogien zurückzugreifen. Deshalb betrachten wir im Folgenden den 3 dimensionalen Raum als Mannigfaltigkeit, die in einen fiktiven 4 dimensionalen Raum eingebettet ist (Dieser Raum hat mit der 4 dimensionalen Raum-Zeit nichts zu tun). Außerdem sei $R(t) = R = konst.$ Für die Krümmung erhalten wir mit Gl. 24 und der Definition $\lambda(t) = \frac{k}{R(t)^2}$

$$K = 6\lambda = \frac{6k}{R^2} \quad (28)$$

Für $k = +1$ erhält man nun als geometrische Analogie gerade die 3-Sphäre mit Radius R . Das besondere am Fall positiver Krümmung ist, dass der Rauminhalt V endlich, das Universum aber dennoch abgeschlossen ist. V ergibt sich zu

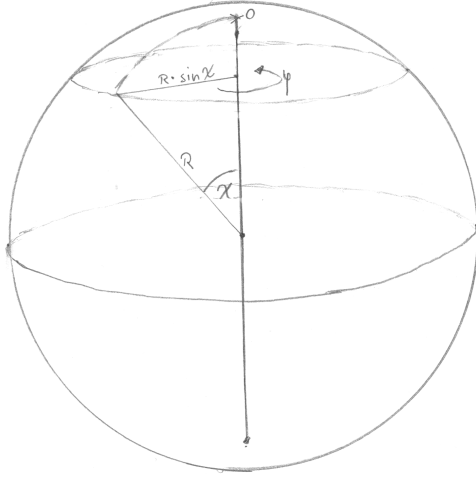


Abbildung 2: Positiv gekrümmte Raumzeit für $\theta = \frac{\pi}{2} = \text{konst}$

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\chi R^3 \sin^2(\chi) \sin(\theta) = 2\pi^2 R^3 \quad (29)$$

Es ist außerdem erwähnenswert, dass in einem endlichen Raum die Gesamtladung Null wäre:⁷ Jede geschlossene Fläche in einem endlichen Raum schließt auf beiden Seiten einen endlichen Bereich ein. Da der Fluss durch diese Fläche also einerseits gleich der eingeschlossenen Ladung Q_i , andererseits aber gleichzeitig gleich der negierten äußeren Ladung Q_a sein muss, gilt $Q_i = -Q_a$. Für die Gesamtladung erhält man also $Q = Q_i + Q_a = 0$ (Die gleiche Argumentation greift auch für den Gesamtviererimpuls).

Das konvexe Universum hebt sich noch in einem weiteren Punkt von den beiden anderen Fällen ab: Da es abgeschlossen und endlich ist existiert eine maximale Entfernung $R\pi$ zwischen zwei Punkten.

Für $k = -1$ erhält man keine ganz so „anschauliche“ Analogie. Es handelt sich um eine Pseudosphäre, die man lokal durch ein Hyperboloid nähern kann. Ein solches Universum wäre offen und unendlich.

Um die Universen unterschiedlicher Krümmung weiter zu charakterisieren ist das Verhältnis der Oberfläche⁸ einer Kugel mit Radius D zu $4\pi D^2$ (= Oberfläche einer Kugel mit gleichem Radius im euklidischen Raum) recht nützlich. Wir erhalten zunächst (wir wählen den Weg $\gamma(\lambda) = x^i(\lambda) = (\chi = \lambda, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0)$ mit $\lambda \in [0, \chi_0]$)

⁷L. D. Landau S. 430

⁸G. Bali & T. Fliekbach

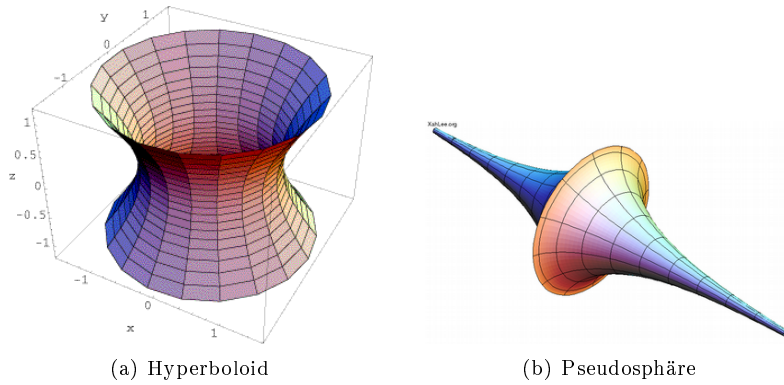


Abbildung 3: Beispiele für 2-dimensionale negativ gekrümmte Räume

$$D(\chi_0) = \int_{\gamma} dl = \int_0^{\chi_0} d\lambda \sqrt{g_{ik}(\lambda) \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} \frac{dx^k(\lambda)}{d\lambda}} = \int_0^{\chi_0} d\lambda \sqrt{g_{\chi\chi}(\lambda)} = R\chi_0 \quad (30)$$

und für die Oberfläche

$$A(\chi_0) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} = 4\pi f^2(\chi) R^2 \quad (31)$$

Trägt man nun $\frac{A}{4\pi D^2}$ gegenüber χ auf, so sieht man, dass die Kugeloberfläche für $k = -1$ mit dem Radius schneller wächst als im euklidischen Fall ($k = 0$). Für $k = +1$ hingegen wächst sie langsamer als für $k = 0$. Sie erreicht für $D = \frac{R\pi}{2}$ ihr Maximum, fällt dann wieder ab und wird für $D = R\pi$ schließlich Null.

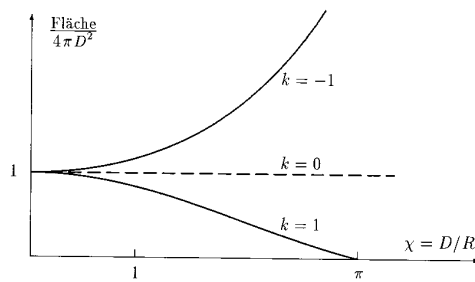
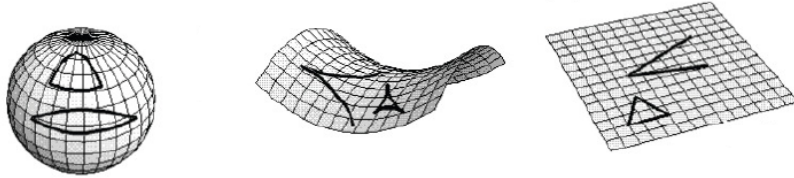


Abbildung 4: Verhältnis einer Kugeloberfläche in der RWM zu einer Kugeloberfläche im euklidischen Raum¹⁰

Ein weitere Möglichkeit die beiden (konstant) gekrümmten Räume vom euklidischen Raum zu unterscheiden ist die Winkelsumme von Dreiecken. Sie ist für ungekrümmte Räume stets 180° , während sie

für positiv gekrümmte Räume darüber und für negativ gekrümmte Räume darunter liegt.



Die letzten beiden Eigenschaften führen nun zu durchaus meßbaren Effekten (z.B. Linseneffekt bei der Hintergrundstrahlung). Gemessen wird jedoch, dass die Krümmung K im heute sichtbaren Universum gleich Null bzw. zu vernachlässigen ist. Wir leben also anscheinend in einem euklidischen Universum. Bedeutet dies nun automatisch $k=0$? Nicht unbedingt. Angenommen der Radius des mit uns kausal verbundenem Teil des Universum r_{EH} ist viel kleiner als der Skalenfaktor R , was gleichbedeutend ist mit $r \ll 1$ in Gl. 25, dann folgt aus

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \stackrel{r \ll 1}{\approx} dt^2 - R^2(t) [dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad (32)$$

eine euklidische Metrik unabhängig von k .

3 Ein paar Abstandsbegriffe

Im dynamischen Universum gibt es fast unendlich viele Möglichkeiten Abstände zu definieren - es kommt eben ganz darauf an was man wissen will. Um nicht noch mehr zur (anscheinend vorhandenen) Verwirrung beizutragen, will ich anhand einiger konkreter Fragestellungen auf die verschiedenen Abstandsbegriffe eingehen („Wir befinden uns dabei immer am Koordinatenursprung“).

Welchen Abstand hat ein Raumpunkt $(\chi_0, \phi_0, \theta_0)$ von uns?

Er hat zu jedem Zeitpunkt (auch im expandierenden Universum) den Koordinatenabstand $\Delta\chi$ („comoving distance“). (Das ist nicht verwunderlich, da wir unser Koordinatensystem ja gerade so gewählt haben). Das entspricht zum Zeitpunkt $t = \text{konst}$ gerade dem Abstand $D_p(t) = R(t)\Delta\chi$ („cosmological proper distance“).

Welche Zeit Δt braucht ein Lichtstrahl um den Koordinatenabstand $\Delta\chi$ zu überwinden?

Für Licht gilt $ds^2 = 0$. Damit erhält man

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 \stackrel{\phi, \theta = \text{konst}}{=} dt^2 - R^2(t) d\chi^2 \stackrel{!}{=} 0$$

und folglich ($\Delta t = t_2 - t_1$)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R(t)} = \int_{\chi_1}^{\chi_2} d\chi = \Delta\chi \quad (33)$$

Wie stark ist die Rotverschiebung (aufgrund der Expansion) $z := \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{quelle}}$ für ein solches Signal?¹¹

Aus der obigen Gleichung folgt direkt

$$\begin{aligned} \Delta\chi &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} \frac{dt}{R(t)} \\ \Rightarrow 0 &\stackrel{!}{=} \left(\int_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} \right) \frac{dt}{R(t)} = \left(\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} - \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} \right) \frac{dt}{R(t)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)} - \frac{\delta t_2}{R(t_2)} \\ &\Rightarrow \frac{\delta t_1}{R(t_1)} = \frac{\delta t_2}{R(t_2)} \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Rotverschiebung

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{quelle}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R(t_2)}{R(t_1)} - 1 \quad (34)$$

Es handelt sich hierbei um die rein kosmologische Rotverschiebung. Gravitationsrotverschiebung und Rot- / Blauverschiebung aufgrund des Dopplereffekts müssen zusätzlich berücksichtigt werden.

Was ist ein Luminositätsabstand?¹²

Man kann auch durch den Unterschied zwischen scheinbarer (l) und absoluter (L) Luminosität auf die Entfernung eines Himmelskörpers schließen. Dabei ist l die auf der Erde empfangene Energiestromdichte und L die tatsächlich ausgesandte Leistung. Für l erhält man

$$l = \frac{L R(t_1)^2}{A R(t_2)^2} \quad (35)$$

¹¹G. Bali

¹²T. Fließbach

Einen Faktor $\frac{R(t_1)}{R(t_2)}$ erhält man durch eine Ausdünnung der Photonen, da der Raum ja seitdem gerade um diesen Faktor gestreckt wurde. Den zweiten Faktor $\frac{R(t_1)}{R(t_2)}$ erhält man durch die mit der Rotverschiebung einhergehende Energieverringern der Photonen. Für A muss man nun die in Gl. 31 berechnete Kugeloberfläche einsetzen. Der Kosmologe definiert nun folgendermaßen

$$l = \frac{L}{4\pi f^2(\chi)R^2(t_2)} \frac{R(t_1)^2}{R(t_2)^2} =: \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad (36)$$

Dementsprechend ist der Luminositätsabstand

$$D_L = R(t_2)f(\chi)\frac{R(t_2)}{R(t_1)} = R(t_2)f(\chi)(1+z) \quad (37)$$

Es handelt sich also um den Abstand zu einer (erdachten) Projektion des Punktes in unseren Tangentialraum, gestreckt um den Faktor, um den sich das Universum seit der Aussendung des Signals ausgedehnt hat. Mittels folgender Formel kann man aus D_L wieder D_p berechnen:

$$D_p = \frac{D_L}{(1+z)} \frac{\chi}{f(\chi)} \quad (38)$$

4 Literaturverzeichnis

- J. N. Islam, 1992, Cambridge University Press, An introduction to mathematical cosmology
- L. D. Landau, 1992, Akademie Verlag GmbH, Klassische Feldtheorie
- T. Fließbach, 1995, Spektrum - Akademischer Verlag, Allgemeine Relativitätstheorie
- P. A. M Dirac, 1996, Princeton University Press, General Theory of Relativity
- L. P. Eisenhart, 1997, Princeton University Press, Riemannian Geometry
- D. W. Hogg, 2000, Distance measures in cosmology
- D. Burger, 2001, Aulis Verlag, Silvestergespräche eines Sechsecks