Ausbildungsseminar

Kerne und Sterne

Grundgleichungen des Sternaufbaus

Matthias Heise

12.4.2007

Inhalt

1. Herleitung

1.1. Annahmen

Bereits bevor klar wurde, dass die Energie der Sterne durch Kernfusion erzeugt wird, hatten sich viele Physiker und Astronomen Gedanken über die Vorgänge im Inneren von Sternen gemacht. Und mit einigen einfachen Annahmen konnten sie Modelle entwickeln, die die Wirklichkeit recht gut beschrieben. Auch heute kann man schon einiges über den Aufbau der Sterne sagen, ohne die speziellen Vorgänge zur Energieerzeugung zu berücksichtigen. Indem man allgemeine physikalische Gesetze auf die Sterne anwendet, kann man das Verhalten der Zustandsgrößen der Sterne in ihrem Inneren beschreiben. Man erhält so die Grundgleichungen des Sternaufbaus.

Man beschreibt den Stern als Gaskugel die von der Gravitation zusammengehalten wird. Man nimmt an, dass der Stern nicht rotiert, kein Magnetfeld vorliegt und keine nahen Nachbarn (Planeten bzw. andere Sterne) vorhanden sind. Dadurch wirken keine Zentrifugal-, magnetische und Gezeitenkräfte und die Kugelsymmetrie bleibt erhalten.

Das ist im Normalfall nicht richtig, trotzdem erhält man recht gute Ergebnisse.

Weiterhin nimmt man an, dass man die Sternmaterie als ideales Gas beschreiben kann. Die Dichte im Inneren eines Sterns ist zwar sehr hoch, doch die extrem hohen Temperaturen führen dazu, dass diese Annahme trotzdem berechtigt ist. Die Zustandsgleichung für ein kilomol eines idealen Gases lautet:

$$PV = \tilde{R}T \qquad (1)$$

Führt man nun noch die Masse μ eines kilomols der Sternmaterie ein, erhält man mit der Dichte ρ:

$$P = \frac{\rho}{\mu}\tilde{R}T \qquad (2)$$

Mit diesen Annahmen kann man die Grundgleichungen herleiten und damit relativ genaue Aussagen über den inneren Aufbau der Sterne und ihrer Entwicklung zu machen.

1.2. Massenverteilung

Zuerst beschäftigen wir uns mit der Masse. Dazu zerteilen wir den Stern in Kugelschalen. Die Masse jeder Kugelschale drücken wir über die Dichte und den Radius der Kugelschale aus. Damit erhalten wir bereits die erste Grundgleichung:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi\rho r^2 \qquad (3)$$

1.3. Hydrostatisches Gleichgewicht

Der Stern befindet sich im Gleichgewicht, das heißt, der Druck im Inneren des Sterns wirkt der Gravitationskraft genau entgegen.

Auf ein kleines Massenelement wirkt die Gravitationskraft:

$$F_G = -G\frac{M_r dM_r}{r^2} \qquad (4)$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante.

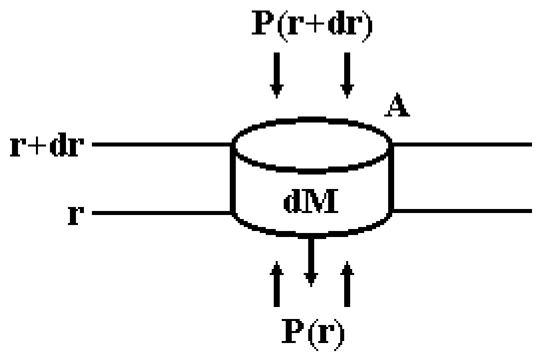

Abbildung 1: Hydrostatisches Gleichgewicht

Die Änderung des Drucks auf der Länge dr bewirkt die Kraft:

$$F_p = A(P(r+dr) - P(r)) = 4\pi r^2 dP \qquad (5)$$

Die beiden Kräfte müssen gleich sein. Mit Hilfe von Gleichung (3) folgt dann die zweite Grundgleichung:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{G M_r}{r^2} \qquad (6)$$

1.4. Energieerzeugung

Wie der Stern Energie erzeugt, soll hier nicht näher betrachtet werden. Wir definieren nur die Energieerzeugungsrate ε. Diese bestimmt die Energie die pro Zeit- und Masseneinheit im Stern erzeugt wird. Bei einem Hauptreihenstern ist ε nur im Kern des Sterns von Bedeutung.
Daraus ergibt sich die dritte Grundgleichung:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \qquad (7)$$

Die Energieerzeugungsrate hängt vom Kenfusionsprozess und von der Dichte und der Temperatur ab. Die Abhängigkeit lässt sich durch ein Potenzgesetz ausdrücken:

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho^\lambda T^\nu \qquad (8)$$

λ ist in allen Hauptreihensternen gleich 1. ν hängt stark vom ablaufenden Prozess ab: In Sternen mit geringen Massen, in denen der pp-Prozess dominiert, ist ν=4. In Sternen mit Massen über etwa 2 Sonnenmassen, in denen der CNO-Zyklus abläuft, ist ν=15.

1.5. Energietransport

Zunächst definieren wir F als Betrag des Energiestroms:

$$F(r) = \frac{L_r(r)}{4\pi r^2} \qquad (9)$$

Theoretisch kann die Energie über drei verschiedene Wege transportiert werden: Strahlungstransport, Konvektion oder Wärmeleitung. Solange man den Stern als klassisches

Gas beschreiben kann, ist die Wärmeleitung um viele Größenordnungen kleiner, als der Strahlungstransport und kann daher vernachlässigt werden.

1.5.1. Strahlungstransport

Man beschreibt den Strahlungstranpsort als Diffusion der Photonen. Daher ergibt sich nach dem Fick'schen Gesetz:

$$F(r) = -D \frac{du(r)}{dr} \tag{10}$$

Dabei ist u die Energiedichte des Strahlungsfelds, also:

$$u = aT^4$$

mit

$$a = \frac{4\sigma}{c} = 7{,}57 \cdot 10^{-16} \frac{J}{m^3 K^4} \tag{11}$$

D ist der Diffusionskoeffizient. Für ein Gas kann D geschrieben werden, als:

$$D = \frac{1}{3} v l \tag{12}$$

Hier ist v die Geschwindigkeit der Teilchen und l die mittlere freie Weglänge. Der Faktor 1/3 kommt von der Mittelung über die drei Raumrichtungen.

In unserem Fall haben wir ein Photonengas, das heißt die Geschwindigkeit der Teilchen ist gleich der Lichtgeschwindigkeit. Die mittlere freie Weglänge ist der reziproke Wert des Absorptionskoeffizienten α. Dieser hängt von der Dichte ab. In der Astronomie verwendet man stattdessen die Opazität κ:

$$\alpha_\nu = \rho \kappa_\nu \tag{13}$$

Damit wird

$$l_\nu = \frac{1}{\rho \kappa_\nu} \tag{14}$$

Um die Frequenzabhängigkeit nicht mitnehmen zu müssen, verwendet man das sogenannte Rosseland-Mittel: Man mittelt über alle Frequenzen und verwendet dabei die Planckfunktion als Wichtung:

$$l = \frac{\int_0^\infty l_\nu u(\nu, T) d\nu}{\int_0^\infty u(\nu, T) d\nu} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\rho \kappa_\nu} u(\nu, T) d\nu}{\int_0^\infty u(\nu, T) d\nu} = \frac{1}{\rho \kappa} \tag{15}$$

Setzt man dies in Gleichung (12) und diese dann in Gleichung (10) ein, erhält man:

$$F(r) = -\frac{4}{3} \frac{c}{\rho \kappa} a T^3 \frac{dT}{dr} \tag{16}$$

Der Vergleich mit Gleichung (7) liefert dann das Ergebnis für die vierte Grundgleichung:

$$\frac{dT}{dr}=-\frac{3}{4}\frac{\rho\kappa}{acT^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{17}$$

1.5.2. Ursachen für Opazität

Die Opazität wird im Prinzip nur durch zwei Vorgänge verursacht: Streuung an freien Elektronen und Absorption. Die Streuung wird durch die Thomson-Streuung beschrieben und ist unabhängig von der Frequenz. Näherungsweise erhält man:

$$\kappa_T=0{,}020(1+X)\frac{m^2}{kg} \tag{18}$$

Dabei ist X der Anteil des Wasserstoffs. Der Anteil von Helium wurde auf etwa ein Viertel genähert, der Anteil der schweren Elemente ganz vernachlässigt.
Bei der Absorption unterscheidet man, ob sich das Elektron vor und nach dem Vorgang an ein Atom gebunden ist oder nicht. So erhält man frei-freie-, gebunden-freie und gebunden-gebundene Übergänge. Martin Schwarzschild entwickelte Näherungsformeln für diese drei Übergänge in Abhängigkeit von der Materialzusammensetzung des Sterns.
Insgesamt erhält man:

$$\kappa=\kappa_0\rho T^{-3{,}5}+\kappa_T \tag{19}$$

κ_T ist dabei der Beitrag der Thomson-Streuung. κ_0 hängt von der Sternzusammensetzung ab, und enthält die Beiträge der drei verschiedenen Absorptions-Übergänge.

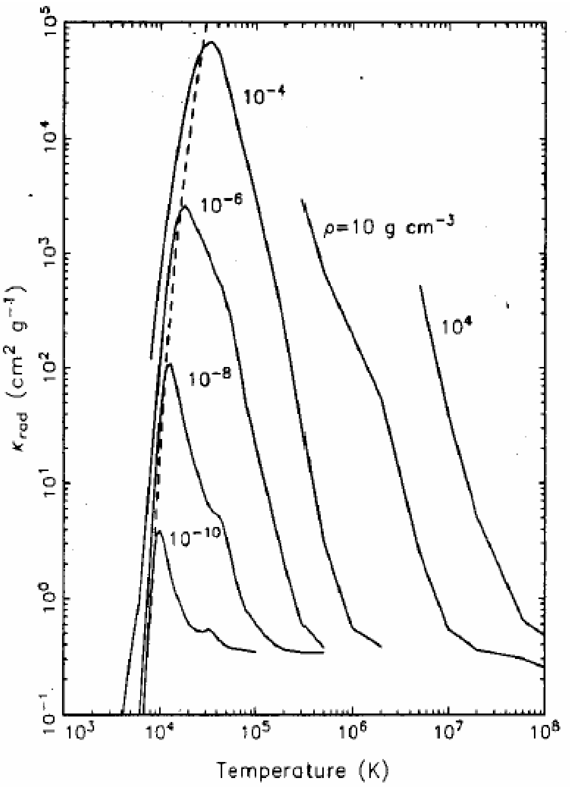

Abbildung 2: Verlauf der Opazität für wasserstoffreiche Materie

1.5.3. Konvektion

Wird die Opazität zu groß, so wird der Strahlungstransport ineffizient. Der Temperaturgradient steigt an, und Konvektion setzt ein. Bei der Sonne ist dies im äußeren Drittel der Fall.

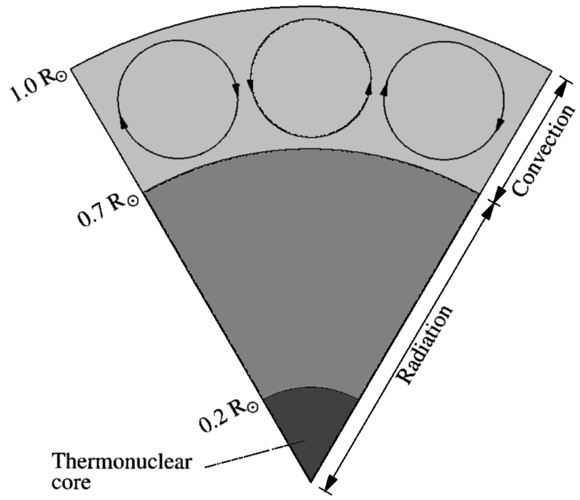

Abbildung 3: Konvektion und Strahlung in der Sonne

Die Vorgänge bei Konvektion sind sehr kompliziert. Bis heute ist keine wirklich befriedigende Theorie zu ihrer Beschreibung gefunden worden. Ein ungefähre Beschreibung ist jedoch möglich: Man betrachtet eine aufsteigende Gasblase. Der Druck, der auf die Blase wirkt, nimmt dabei ab. Man nimmt an, dass die Blase zu schnell aufsteigt, um Wärme mit der Umgebung austauschen zu können, das heißt sie dehnt sich adiabatisch aus. Wenn auf diese Weise Energie transportiert werden soll, muss die Temperatur in der Blase dabei weniger sinken, als in der Umgebung:

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{act} > \left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad} \tag{20}$$

Man kann zeigen, dass die Konvektion schon bei sehr kleinen Abweichungen vom adiabatischen Temperaturgradienten der dominierende Energietransportweg wird.

Der Gasblase wird nun solange aufsteigen, bis ihre Dichte gleich oder größer als die der Umgebung ist. Dann wird sie liegen bleiben, bzw. wieder absinken. Aus Beobachtungen weiß man, dass normalerweise das letzte der Fall ist: Es bilden sich sogenannte Rayleigh-Benard-Zellen, bei denen im Inneren heißes Material aufsteigt und außen wieder absinkt. Diese Zellen sollten nach der Theorie stabil sein, man beobachtet allerdings bei der Sonne, dass sie sich nach einige Minuten auflösen und wieder neu bilden. Der Grund dafür sind wahrscheinlich Turbulenzen.

Wir verwenden die Adiabatengleichungen, die sich aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik herleiten lassen.

$$TV^{\gamma-1} = const. \tag{21}$$

$$P^{1-\gamma}T^{\gamma} = const. \tag{22}$$

$$PV^{\gamma} = const. \tag{23}$$

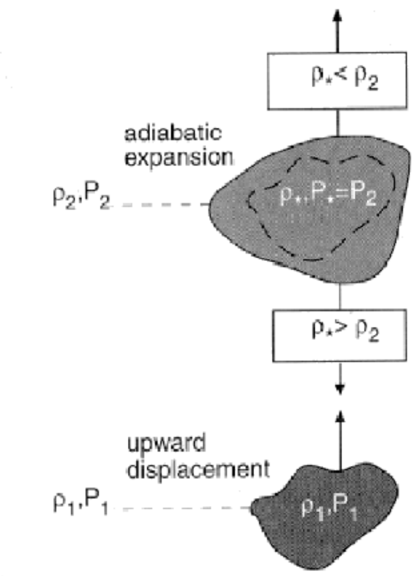

Abbildung 4: Auftstieg einer Gasblase

Logarithmiert man Gleichung (21), so erhält man:

$$(1-\gamma)\ln(P)+\gamma\ln(T)=const. \tag{24}$$

Nun bildet man die Ableitung:

$$\frac{dP}{P}\frac{T}{dT}=\frac{\gamma}{\gamma-1} \tag{25}$$

oder

$$\frac{T}{P}\left(\frac{dT}{dr}\right)^{-1}\frac{dP}{dr}=\frac{\gamma}{\gamma-1} \tag{26}$$

Dies ist also eine Gleichung zur Beschreibung des adiabatischen Temperatur-Gradienten. Wie oben begründet findet Konvektion nur statt, wenn der tatsächliche Temperatur-Gradient größer ist als der adiabatische. Die Abweichung wird im weiteren vernachlässigt.
Setzt man Gleichung (6) und Gleichung (2) in Gleichung (26) ein, erhält man die fünfte Grundgleichung:

$$\frac{dT}{dr}=\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\frac{\mu}{\tilde{R}}\frac{GM_r}{r^2} \tag{27}$$

2. Grundgleichungen des Sternaufbaus

2.1. Lösen der Grundgleichungen

Wir haben nun fünf Grundgleichungen für den Sternaufbau:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi\rho r^2 \tag{3}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{GM_r}{r^2} \tag{6}$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho\epsilon \tag{7}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4}\frac{\kappa\rho}{acT^3}\frac{L_r}{4\pi r^2} \tag{17}$$

Und in Gebieten mit Konvektion:

$$\frac{dT}{dr} = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{\mu}{\tilde{R}}\frac{GM_r}{r^2} \tag{27}$$

Diese Gleichungen müssen simultan gelöst werden. Dazu braucht man noch den Druck in Abhängigkeit von der Temperatur, der sich aus dem Anteil des idealen Gases und dem Strahlungsdruck zusammensetzt:

$$P = \frac{\rho}{\mu}\tilde{R}T + \frac{1}{3}aT^4 \tag{28}$$

Außerdem braucht man noch die Energieerzeugungsrate und die Opazität:

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho^\lambda T^\nu \tag{8}$$

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3,5} + \kappa_T \tag{19}$$

Um jetzt den stationären Zustand eines Sterns (also ohne Veränderung der Zusammensetzung durch die Kernfusion) zu bestimmen, löst man numerisch die Differentialgleichungen. Dabei muss man die folgenden Randbedingungen für den Kern und die Sternoberfläche beachten:

$r \to 0 \qquad M_r \to 0 \qquad L_r \to 0$

$r \to R \qquad T \to 0 \qquad \rho \to 0 \qquad P \to 0$

Die Randbedingung für die Sternoberfläche sind streng genommen falsch: Eigentlich müsste man die Werte der Photosphäre einsetzten. Die Schichtung des Sterns wird dadurch aber kaum beeinflusst.

Die Lösung ist dann allein durch die Vorgabe der Masse bestimmt.

2.2. Lösungen für die Sonne

Es folgen Darstellungen einiger numerischer Lösungen für die Grundgleichungen im Fall der Sonne:

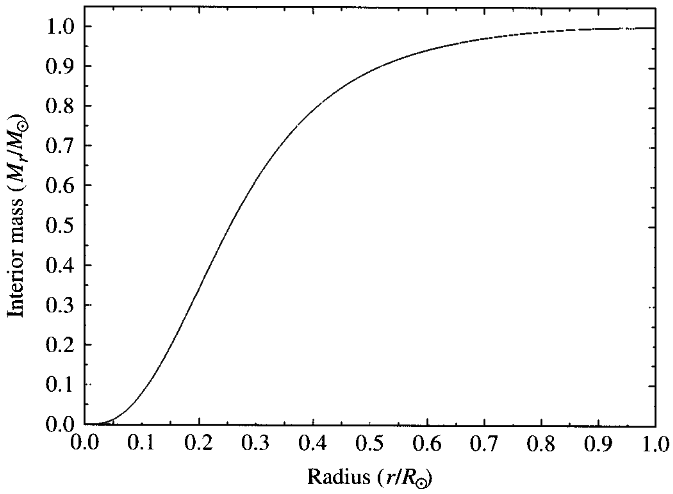

Abbildung 5: Massenverteilung innerhalb der Sonne

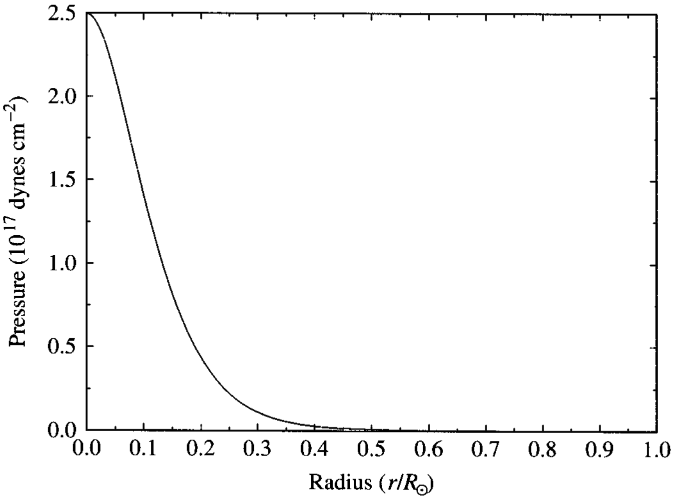

Abbildung 6: Druck innerhalb der Sonne

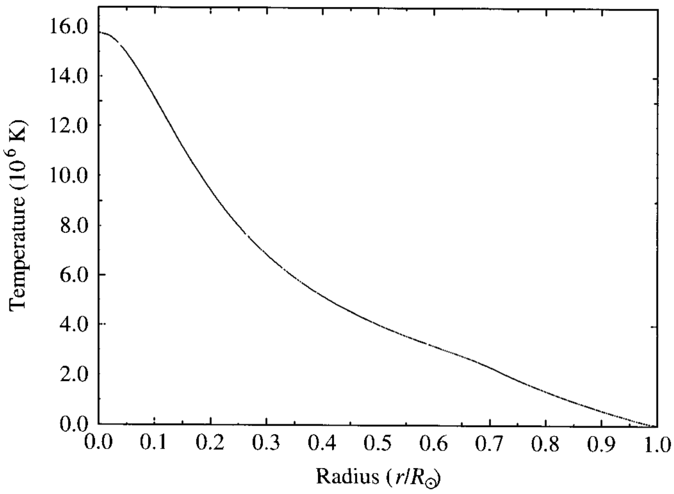

Abbildung 7: Temperatur innerhalb der Sonne

Interessant ist, dass bis zum halben Radius bereits 90% der Sonnenmasse enthalten sind. Der Druck fällt nach dem halben Radius bereits stark ab. Bei der Temperaturverteilung ist bei etwa 70% des Radius ein Knick in der Kurve erkennbar. Hier setzt die Konvektion ein.

2.3. Hauptreihensterne

Die Hauptreihensterne haben in etwa die gleiche chemische Zusammensetzung und unterscheiden sich nur in ihrer Masse. Daher liegt der Schluss nahe, dass die Hauptreihensterne durch ein Modell beschrieben werden können.
Ein einfaches Bild erhält man, wenn man in den Grundgleichungen Mittelwerte einsetzt. Außerdem ersetzt man Ableitungen durch Quotienten, und für Masse, Radius und Leuchtkraft setzt man jeweils die Hälfte des Gesamtwerts. So erhält man aus den Grundgleichungen:

$$\frac{M}{R} \propto \bar{\rho}\, R^2 \tag{29}$$

$$\frac{P}{R} \propto \bar{\rho}\, \frac{M}{R^2} \tag{30}$$

$$\frac{L}{R} \propto R^2\, \bar{\rho}^2\, \bar{T}^{\nu} \tag{31}$$

$$\frac{T}{R} \propto \frac{\bar{\rho}}{\bar{T}^3} \frac{L}{R^2} \tag{32}$$

Aus der idealen Gasgleichung erhält man:

$$\bar{\rho} \propto \frac{P}{T} \tag{33}$$

Aus Gleichungen (29) und (30) wird damit:

$$\bar{\rho} \propto \frac{M}{R^3} \tag{34}$$

$$\bar{T} \propto \frac{M}{R} \tag{35}$$

Setzt man diese Gleichungen in Gleichung (32) ein, ergibt sich:

$$L \propto M^3 \tag{36}$$

Setzt man Gleichungen (34) bis (36) in Gleichung (31) ein erhält man:

$$R \propto M^{\frac{\nu-1}{\nu+3}} \tag{37}$$

In dieser Gleichung ergibt sich ein Exponent zwischen 0,5 und 0,75 je nach dem vorherschenden Fusionsprozess (siehe Kapitel 1.4).

Bei genaueren Modellrechnungen weichen die Exponenten in Gleichung (36) und (37) etwas von den hier erhaltenen Ergebnissen ab. Die Gleichungen beschreiben aber auch so schon die Hauptreihensterne recht gut.

Auch die Lage der Hauptreihe im Hertzsprung-Russel-Diagramm (HRD) lässt sich mit diesen einfachen Rechnungen bereits andeuten: In Gleichung (37) setzten wir für den Exponenten 3/4 ein und ersetzen damit die Masse in Gleichung (36):

$$L \propto R^4 \tag{38}$$

Für die effektive Temperatur eines Sterns gilt:

$$T_{eff}^4 \propto \frac{L}{R^2} \tag{39}$$

Also ergibt sich:

$$T_{eff}^4 \propto L^{1/2} \quad \text{bzw.} \quad L \propto T_{eff}^8 \tag{40}$$

Logarithmiert man diese Gleichung, so ergibt sich die Gerade der Hauptreihe im HRD:

$$\ln(L) = 8 \ln(T_{eff}) + const. \tag{41}$$

Die tatsächliche Krümmung der Hauptreihe kommt daher, dass der Exponent in Gleichung (37) variiert, da verschiedene Fusionsprozesse in den Sternen ablaufen.

3. Literatur:

[1] W. Gebhardt: Sternaufbau und Entwicklung. Skript der Vorlesung WS 01/02

[2] A. Weigert / H.J. Wendker: Astronomie und Astrophysik – Ein Grundkurs, 3. Aufl. VCH 1996

[3] Bradley W. Carroll, Dale A. Ostlie: An Introduction to Modern Astrophysics, Addison Wesley Comp. 1996