Turbulente Strömung

Benedikt Urbanek

15. Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Herleitung der Navier-Stokes-Gleichung 2
1.1 Mathematische Grundlage - Die Substantielle Ableitung 2
1.2 Die Kontinuitätsgleichung 2
1.3 Die Bewegungsgleichung 3
1.3.1 Die Druckkraft 3
1.3.2 Die inneren Kräfte 4
1.3.3 Die Navier-Stokes-Gleichung 4

2 Das Ähnlichkeitsprinzip 4
2.1 Die Reynoldszahl 4
2.2 Entdimensionalisierung 5
2.3 Das Ähnlichkeitsgestz 6
2.4 Erneute Dimensionsbetrachtung 6

3 Das Navier-Stokes-Problem 6

4 Grundideen der Stabilitätsanalyse 7
4.1 Definition 7
4.2 Der Lyapunov-Exponent 8

5 Vergleich von turbulenter und laminarer Strömung 8

6 Phänomenologie turbulenter Strömung 9
6.1 Selbstähnlichkeit 9
6.2 Schwer voraussagbare räumliche und zeitliche Struktur 10
6.3 Hohe Empfindlichkeit für Anfangsbedingungen 10
6.4 Hohe Diffusivität 10
6.5 Dissipativität 10

1 Herleitung der Navier-Stokes-Gleichung

1.1 Mathematische Grundlage - Die Substantielle Ableitung

Betrachtet wird das Differential einer Funktion f, die vom Ort $\vec{x}$ und der Zeit t abhängt.

$$df(\vec{x},t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{1}$$

Die Richtungen dx, dy, dz werden nun mit den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w umgeschrieben.

$$df(\vec{x},t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}udt + \frac{\partial f}{\partial y}vdt + \frac{\partial f}{\partial z}wdt \tag{2}$$

Hieraus ergibt sich die substantielle Ableitung.

$$\frac{df(\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)f(\vec{x},t) \tag{3}$$

Die Substantielle Ableitung auf die Geschwindigkeit $\vec{u}$ angewendet sieht wie folgt aus:

$$\frac{d\vec{u}(\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}(\vec{x},t) \tag{4}$$

Hier liegt das Modell des **Mitbewegten Beobachters** zugrunde. Der Beobachter „sitzt“ also auf einem kleinen massebehafteten Teilchen und bewegt sich mit dem Strom. Der **lokale Anteil** $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ gibt an, wie sich die Geschwindigkeit an einem festen Ort ändert. Der **konvektive Anteil** beinhält die Änderung, die sich zusätzlich duch die Bewegung des massebehafteten Teilchens ergibt.

1.2 Die Kontinuitätsgleichung

Wir fordern für eine Strömung, dass die Kontinuitätsgleichung gälte:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{u}) = 0\ . \tag{5}$$

Mit der substantiellen Ableitung lässt sie sich umschreiben.

$$(\frac{d\rho}{dt} - (\vec{u}\nabla)\rho) + \nabla(\rho\vec{u}) = 0 \tag{6}$$

Die Anwendung der Produktregel liefert:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\vec{u} = 0 \ . \tag{7}$$

Wenn wir ein inkompressiebles Fluid annehmen, d.h. die Dichte bleibt konstant, ergibt sich als Bedingung an das Geschwindigkeitsfeld die Divergenzfreiheit:

$$\nabla\vec{u} = 0 \ . \tag{8}$$

1.3 Die Bewegungsgleichung

Nun setzen wir klassisch nach Newton an und verwenden die substantielle Ableitung:

$$dF = dm\frac{d\vec{u}}{dt} = dm\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}\right) \ . \tag{9}$$

Im Weiteren werden **spezifische Kräfte** betrachtet, d.h. Kraft je Masse. Für sie gilt nun:

$$f = \frac{dF}{dm} = \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}\right) \ . \tag{10}$$

Wie setzt sich die Gesamtkraft zusammen?

Zunächst wirken **äußere spezifische Kräfte** f^a, wie Gravitations- oder elektromagnetische Felder.
Desweiteren gibt es die **spezifische Druckkraft** f^p, die auf die Oberfläche des Fluidelements wirkt.
Und schließlich die **spezifischen innneren Kräfte** f^i aus dissipativen Erscheinungen wie Wärmeleitung, innere Reibung oder Zähigkeit.

1.3.1 Die Druckkraft

Die Kraft, die von außen auf ein Volumen V mit Oberfläche δV wirkt, ist gegeben durch:

$$\vec{F} = -\int\limits_{\delta V} p\vec{n}dA = -\int\limits_{V} \nabla p dV \tag{11}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{n}$ den Einheitsnormalenvektor des Flächenelements dA. Auf jedes Volumenelement dV wirkt also die Kraft $-\nabla p dV$. Hieraus ergibt sich die spezifische Druckkraft.

$$\vec{f^p} = \frac{-\nabla p dV}{dm} = \frac{-\nabla p dV}{\rho dV} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{12}$$

1.3.2 Die inneren Kräfte

Nun kommen noch irreversieble Prozesse hinzu. Diese rühren von der Zähigkeit des Fluids her. Die Zähigkeit oder auch Viskosität sorgt ständig dafür, dass kinetische Energie in ungerichtete Molekülbewegung übergeht. Die Form der spezifischen inneren Kraft ist wie folgt:

$$\vec{f^i} = \nu \nabla^2 \vec{u} \ . \tag{13}$$

Hierbei ist $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ die kinetische Viskosität.

1.3.3 Die Navier-Stokes-Gleichung

Fügt man nun alles zusammen ergibt sich die Navie-Stokes-Gleichung.

$$\vec{f} = \vec{f^a} + \vec{f^p} + \vec{f^i} \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{u} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f^a} \tag{15}$$

Sie stellt eine **inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung** dar.

2 Das Ähnlichkeitsprinzip

2.1 Die Reynoldszahl

Jeder Strömungstyp lässt sich durch drei Größen beschreiben.

Die **kinetische Viskosität** ist die wichtigste Materialeigenschaft des umströmenden Fluids. Sie wird in folgenden Einheiten angegeben:

$$[\nu] = \frac{m^2}{s} \ . \tag{16}$$

Die **Geschwindigkeit** des anströmenden Fluids. Sie wird in folgenden Einheiten angegeben:

$$[V] = \frac{m}{s} \ . \tag{17}$$

Eine beliebig gewählte **lineare Abmessung** des umströmten Körpers. Bei gegebener Geometrie reicht eine Abmessung, um den Körper vollständig zu beschreiben. So ist beispielsweise eine Kugel oder ein Quader mit den Seitenverhältnisen 1:2:3 vollständig durch den Durchmesser bzw. eine Kantenlänge bestimmt. Sie wird in folgenden Einheiten angegeben:

$$[L] = m \ . \tag{18}$$

Aus diesen drei Größen lässt sich nur eine dimensionslose Kombination erstellen. Dies ist die **Reynoldszahl**:

$$Re = \frac{VL}{\nu} \tag{19}$$

2.2 Entdimensionalisierung

Im Folgenden wollen wir die Navier-Stokes-Gleichung in eine dimensionslose Form bringen. Hierfür werden alle Geschwindigkeiten in Einheiten der charakteristischen Geschwindigkeit V, alle Längen in Einheiten der charakteristischen Länge L, etc. ausgedrückt. Man schreibt beispielsweise:

$$\tilde{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{L} \ , \ \tilde{\vec{u}} = \frac{\vec{u}}{V} \ . \tag{20}$$

Für den Viskositätsterm erhält man damit:

$$\nu \nabla^2 u_i = \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial {x_j}^2} = \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i V}{\partial {\tilde{x}_j}^2 L^2} = \nu \frac{V}{L^2} \nabla^2 \tilde{u}_i = \frac{V^2}{L} \frac{1}{Re} \nabla \tilde{u}_i \ . \tag{21}$$

Für den konvektiven Teil:

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \sum_{j=1}^{3} \frac{V \tilde{u_j} \partial \tilde{u}_i V}{\partial \tilde{x}_j L} \vec{e_j} = \frac{V^2}{L} (\tilde{\vec{u}} \cdot \nabla)\tilde{\vec{u}} \ . \tag{22}$$

Dies geschieht analog für jeden Term. Es ergibt sich jedes mal ein Faktor $\frac{V^2}{L}$. Wird durch diesen Faktor geteilt, ergibt sich folgende entdimensionalisierte Form der Navier-Stokes-Gleichung:

$$\frac{\partial \tilde{\vec{u}}}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\vec{u}} + (\tilde{\vec{u}} \cdot \nabla)\tilde{\vec{u}} + \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} = \tilde{\vec{f}^a} \tag{23}$$

2.3 Das Ähnlichkeitsgestz

Die oben gesammelten Tatsachen veranlassten Osborne Reynolds 1883 dazu, sein **Ähnlichkeitsgesetz** zu formulierne:

Ähnliche Körper (ähnliche Geometrie) erzeugen bei gleicher Reynoldszahl hydrodynamisch ähnliche Strömungen

2.4 Erneute Dimensionsbetrachtung

Betrachtet man die Dimension des Trägheitsterms ergibt sich:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} \sim \frac{V^2}{L} \text{ bzw. } \frac{\partial \tilde{\vec{u}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\vec{u}}\nabla)\tilde{\vec{u}} \sim 1 \ . \tag{24}$$

Für den Viskositätsterm:

$$\nabla^2 \vec{u} \sim \nu \frac{V}{L^2} \text{ bzw. } \nabla^2 \tilde{\vec{u}} \sim \frac{1}{Re} \ . \tag{25}$$

Bildet man das Verhältnis von Trägheits- und Viskositätsterm, so erhält man die Reynoldszahl.
Die Reynoldszahl gibt **das Verhältnis von Trägheits- zu Viskositätskräften** an.

3 Das Navier-Stokes-Problem

Man betrachtet folgendes System.
Gegeben sei ein **inkompressibles Fluid** in einem **Behälter** Ω mit dem **Rand** $\delta\Omega$.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{u_0}$ gegeben, das folgende Eigenschaften erfüllt:

$\vec{u_0}$ ist divergenzfrei auf Ω,

$\vec{u_0}$ verschwindet auf $\delta\Omega$.

Nun stellt sich die Frage: Gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung der Navier-Stokes-Gleichung, die diese Bedingungen erfüllt?

Diese Frage ist nicht mit einem einfachen Ja oder Nein zu beantworten. Was sich sagen lässt ist folgendes:

Für glatte Geschwindigkeitsfelder gibt es eine eindeutige glatte Lösung für beliebige Reynoldszahlen.

Für $Re < Re_{kritisch}$ existiert diese Lösung für alle Zeiten.

Für $Re > Re_{kritisch}$ existiert diese Lösung nurnoch für endliche Zeiten. Je größer Re wird, desto kürzer ist diese Zeit.

$Re_{kritisch}$ ist dabei ein Werte, der für jede konkrete Strömung anders ist. Er hängt stark vom Aufbau des Experiments ab.

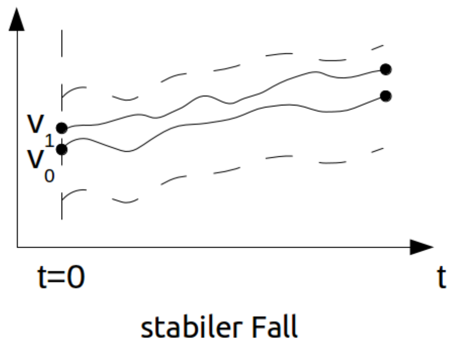
4 Grundideen der Stabilitätsanalyse

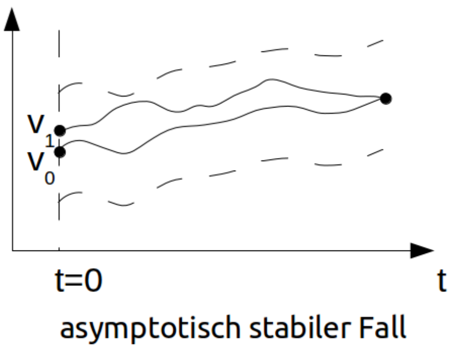
4.1 Definition

Die Stabilitätsanalyse beschäfigt sich mit der zeitlichen Entwicklung von Lösungen einer Differentialgleichung. Es ist interessant zu wissen ob eine Lösung stabil oder instabil ist, denn ist die Lösung instabil, so wird das System schon durch kleien Störungen, die im realen Experiment unvermeidbar sind den Zustand ändern und somit ist diese Lösung im realen Experiment nicht beobachtbar.
Wir betrachten nun Lösungen einer Diferentialgleichung im Phasenraum. Seien v_0 und v_1 Lösungen eine inhomogenen Differentailgleichung. Sie haben zum Zeitpunkt $t = 0$ einen infinitesimalen Abstand δ.

v_0 heißt **stabil**, wenn ihr Abstand zu v_1 für alle Zeiten begrenzt bleibt.

v_0 heißt **asymptotisch stabil**, wenn ihr v_1 für $t \to \infty$ beliebig nahe kommt.



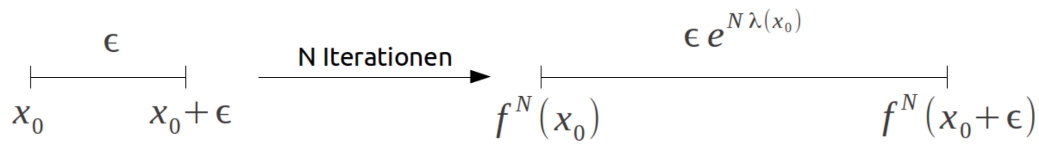


4.2 Der Lyapunov-Exponent

Man betrachte einen rekursiven Vorgang, bei dem die Lösung X einer Funktion f wieder als Sartwert in diese eingesetzt wird.

$$X_{n+1} = f(X_n) \tag{26}$$

Im Navier-Stokes-Problem startet man mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{u_0}$ und berechnet für einen ersten Zeitschritt $\vec{u_1}$. Diese Lösung benutzt man nun für den zweiten Zeitschritt als Anfangslösung. So berechnet man Schritt für Schritt die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitfeldes.
Betrachtet man zwei Lösungen X_0 und $X_0+\epsilon$ im Phasenraum (ihr Abstand ist ϵ), so ergeben sich nach N Iterationen die Lösungen $f^N(X_0)$ und $f^N(X_0+\epsilon)$.



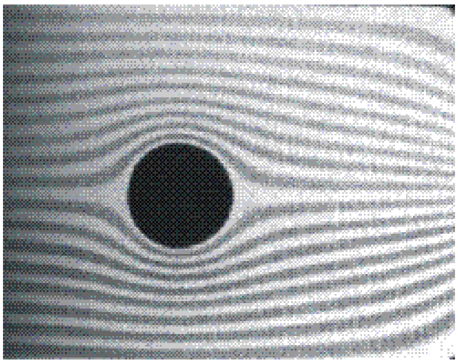
Der **Lyapunov-Exponent** ist ein Maß für die exponentielle Veränderung des Abstands zweier Lösungen im Phasenraum.

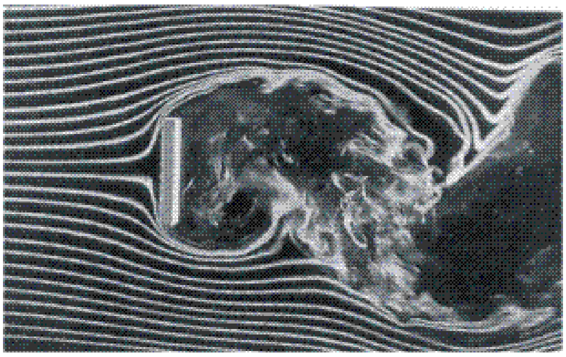
$$\epsilon e^{N\lambda(X_0)} = \left| f^N(X_0) - f^N(X_0+\epsilon) \right| \tag{27}$$

Ist dieser Exponent positiv, vergrößert sich der Abstand fortlaufend, die Lösung X_0 ist also instabil. Ist der Exponent negativ, ist die Lösung asymptotisch stabil.

5 Vergleich von turbulenter und laminarer Strömung

Laminare Strömung ist eine Strömung in Schichten. Es findet keine Durchmischung dieser Schichten statt. Diese Strömung wird durch "kleine" Reynoldszahlen beschrieben.
Turbulente Strömung zeichnet sich durch Verwirbelung der Strömungsschichten aus. Es kommt dadurch zu einer effektiven Durchmischung. Sie wird durch "große" Reynoldszahlen beschrieben.





6 Phänomenologie turbulenter Strömung

Turbulente Strömung zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus, die allesamt charakteristisch für chaotisches Verhalten sind.

6.1 Selbstähnlichkeit

Findet man auf verschiedenen Skalen Strukturen die sich ähneln, spricht man von Selbstähnlichkeit. Als Beispiel sei das Bilderpaar der Dampflokomotive und des Vulkanausbruches gegeben. Obwohl diese beiden turbulenten Strömungen auf sehr unterschiedlichen Größenskalen ablaufen kann man durch bloße Anschauung gleiche Strukturen und damit Selbstählichkeit erkennen.

6.2 Schwer voraussagbare räumliche und zeitliche Struktur

Da die Navier-Stokes-Glechung insbesondere für große Reynoldszahlen nicht mehr lösbar bzw. nur noch näherungweise lösbar ist, lassen sich die räumlichen Strukturen und ihre zeitliche Entwicklung nur noch mit enormem Aufwand bestimmen.

6.3 Hohe Empfindlichkeit für Anfangsbedingungen

Schon kleine Veränderungen der Anfangsbedingungen führen zu einer teilweise drastisch unterschiedlichen zeitlichen Entwicklung der Lösung. Dies ist ein weitere Aspekt, der die Vorhersage der räumlichen und zeitliche Struktur schwer macht.

6.4 Hohe Diffusivität

Durch die starke Verwirbelung und damit Vermischung der Strömungsschichten weisen turbulente Strömungen eine hohe Diffusivität auf. Diese wird überall dort ausgenutzt, wo eine effektive Durchmischung nötig ist. Beispiele hierfür sind Verbrennungsmotoren oder Düsentriebwerke, in denen der Brennstoff möglichst schnell und gleichmäßig mit Luft vermischt werden muss um eine effektive und möglichst restlose Verbrennung zu gewährleisten.

6.5 Dissipativität

Zum Schluss bleibt zu sagen, dass die betrachteten Systeme offen sind, ständig wird auf großen Skalen L dem System Energie zugeführt, die bis auf kleine Skalen herunter gebrochen wird, wo sie von der Viskosität in ungerichtete Molekülbewegung umgesetzt und somit dem System entzogen wird.