

Die Kruskal-Szekeres Koordinaten

EIN BEITRAG ZUM SEMINAR
GEKRÜMMTER RAUM UND GEDEHNTER ZEIT
Vortrag am 11.11.2015



Simon Maier
Seminarleitung: Prof. Dr. Gunnar Bali,
Prof. em. Dr. Wolfgang Gebhardt

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Einführung der Kruskal-Szekeres Koordinaten	3
2.1	Die Koordinatensingularität der Schwarzschildkoordinaten	3
2.2	Die Koordinaten Transformation	4
2.3	Die Kruskal-Szekeres Koordinaten	5
2.4	Das Kruskal Diagramm	6
3	Interpretation des Kruskal Diagramms	8
4	Diskussion der Interpretation	9
5	Zusammenfassung	9

1 Einleitung

Nachdem Einstein im November 1915 die Feldgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie publizierte, gelang es 1916 unter anderen Karl Schwarzschild, diese für nicht rotierende, ungeladene, sphärisch symmetrische Massen durch die sogenannte Schwarzschild-Metrik zu lösen. Diese Metrik ist am Schwarzschildradius singulär. Ein Problem, dessen Lösung erst Mitte der 1950er Jahre dem US-amerikanischen Mathematiker und Physiker Martin Kruskal gelang und 1959 von John Wheeler bekannt gemacht wurde. Neben anderen fand auch der australisch-ungarische Mathematiker George Szekeres 1961 unabhängig von Kruskal die so genannte Kruskal-Szekeres Koordinaten, um die Singularität zu beseitigen. Im Folgenden wird versucht die Herleitung dieser Koordinaten deutlich zu machen, und die Kausalität der damit verbundenen Schwarzschild-Raumzeit zu demonstrieren.

2 Einführung der Kruskal-Szekeres Koordinaten

Nachdem im Abschnitt 2.1 nochmals die Singularität der Schwarzschild Koordinaten thematisiert wird, folgt in 2.2 die Lösung dieses Problems durch die Koordinatentransformation zu den Kruskal-Szekeres Koordinaten. Abschließend werden wir die Schwarzschild-Raumzeit anhand eines Kruskal-Diagramms diskutieren und versuchen die physikalische Relevanz dieser Lösung einzuordnen und zu bewerten.

2.1 Die Koordinatensingularität der Schwarzschildkoordinaten

Die Metrik für kugelsymmetrische, ungeladene, nicht rotierende Massen, die Schwarzschild Metrik, lautet in Schwarzschild Koordinaten:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

mit dem Raumwinkel $d\Omega^2 = d\Theta^2 + \sin^2(\Theta)d\phi^2$ und dem Schwarzschildradius $r_s = \frac{2GM}{c^2}$. Im Limes $r \rightarrow r_s$ gehen die Komponenten

$$g_{00} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$g_{11} = -\frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Wie zu sehen wird die Metrik bei $r = r_s$ singulär. Ein fallender Beobachter jedoch bemerkt bei seinem Fall durch r_s nichts. Dies legt nahe, dass es sich hierbei nicht um eine physikalische Singularität handelt, sondern um eine Koordinaten Singularität. Dadurch können wir das Problem durch eine geeignete Wahl von Koordinaten lösen. Weil sich die Allgemeine Relativitätstheorie auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten bewegt, ist ein derartiger Wechsel des Koordinatensystems möglich, solange die Transformation stetig und differenzierbar ist, sodass die Existenz der inversen Transformation garantiert ist.

Die Singularität bei $r = 0$, $g_{00} \rightarrow -\infty$ soll nicht unbemerkt bleiben, jedoch kann sie nicht durch den Übergang in ein passendes Koordinatensystem aufgehoben werden. Sie wird auch nach der Transformation noch vorhanden sein.

Im Folgenden beschränken wir uns auf die zweidimensionale Version der Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (4)$$

was wir aufgrund der sphärischen Symmetrie ohne Beschränkung der Allgemeinheit tun können.

2.2 Die Koordinaten Transformation

Das folgenden Rechnungen orientiert sich an W. Gebhardt [Geb]. Wie man zeigen kann bemerken auch Null-Geodäten ($ds^2 = 0$), also Lichtstrahlen, nichts von der Singularität bei $r = r_s$. Aus diesem Grund ist es sinnvoll radiale Null-Geodäten als die Achsen des neuen Koordinatensystems zu wählen. Mit $ds^2 = 0$ lässt sich Gleichung 4 umformen zu

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-2}. \quad (5)$$

Nähert sich r an r_s an, desto größer wird die rechte Seite der Gleichung und damit die Steigung der Funktion $t(r)$, welche dem Lichtkegel entspricht. Das bedeutet, dass nahe dem Schwarzschildradius der Lichtkegel und damit die kausal beeinflussbare Zukunft immer schmaler wird. Hier gilt nach wie vor $r > r_s$, weshalb über $r < r_s$ keine Aussage getroffen werden kann.

Die Gleichung 5 wird durch

$$t = \pm \left[r + r_s \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) \right] + \text{const.} \quad (6)$$

gelöst, was durch einfaches Ableiten und anschließendes Quadrieren gezeigt werden kann. Somit erhalten wir eine Bedingung, die von allen Null-Geodäten erfüllt wird. Den Ausdruck in eckigen Klammern definiert man als

$$r^* := \left[r + r_s \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) \right], \quad (7)$$

und während $r \in [r_s, \infty)$, ist $r^* \in (-\infty, \infty)$. Nun definieren wir die Nullkoordinaten u und v als

$$v = t + r^* \quad \text{und} \quad u = t - r^* \quad (8)$$

und sehen durch den Vergleich mit Gleichung 6, dass $u = \text{const.}$ bzw. $v = \text{const.}$ gerade den Bedingung für radiale Null-Geodäten entsprechen.

Durch diese Wahl erhält man zum einen

$$t = \frac{1}{2}(u + v) \rightarrow dt = \frac{1}{2}(du + dv), \quad (9)$$

zum anderen ist

$$\frac{dr^*}{dr} = \left[1 + \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \right] = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \quad (10)$$

und damit

$$dr = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) dr^* = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) (dv - du). \quad (11)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen 9 und 11 in das Linienelement 4 erhält man für ds^2 in Nullkoordinaten

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) dvdu. \quad (12)$$

r ist hier implizit als Funktion von u und v gegeben.

2.3 Die Kruskal-Szekeres Koordinaten

Im Ausdruck 12 wird $g_{00} = 0$ bei $r = r_s$, weshalb Kruskal und Szekeres noch weiter gehen. Betrachten wir Gleichung 7 und die Definition für v und u , so können wir wie folgt umformen:

$$r^* = \left[r + r_s \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2}(v - u) \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{r_s} + \ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) = \frac{1}{2r_s}(v - u) \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) = \exp \left(-\frac{r}{r_s} \right) \exp \left(\frac{1}{2r_s}(v - u) \right) \quad (15)$$

Außerdem gilt

$$\left(1 - \frac{r_s}{r} \right) = \frac{r_s}{r} \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right). \quad (16)$$

Damit kann $\left(1 - \frac{r_s}{r} \right)$ in Gleichung 12 ersetzt werden, sodass sich ds^2 wie folgt liest:

$$ds^2 = \frac{r_s}{r} \exp \left(-\frac{r}{r_s} \right) \exp \left(\frac{1}{2r_s}(v - u) \right) dudv \quad (17)$$

Nach wie vor gilt für Null-Geodäten (bei $ds^2 = 0$), dass $du = 0$ oder $dv = 0$ oder gleichbedeutend $u = \text{const.}$ oder $v = \text{const.}$

Um $\exp \left(\frac{1}{2r_s}(v - u) \right)$ in den Koordinaten zu absorbieren, ist folgende Definition nützlich:

$$U := -\exp \left(-\frac{u}{2r_s} \right) \text{ sowie } V := \exp \left(\frac{v}{2r_s} \right) \quad (18)$$

Durch diese Wahl erhalten wir

$$\frac{dU}{du} = \frac{1}{2r_s} \exp \left(-\frac{u}{2r_s} \right) \text{ und } \frac{dV}{dv} = \frac{1}{2r_s} \exp \left(\frac{v}{2r_s} \right), \quad (19)$$

und damit

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right) dU dV. \quad (20)$$

Wobei das Vorzeichen frei zu wählen ist. Durch eine letzte Koordinatentransformation

$$T = \frac{1}{2}(U + V) \text{ und } X = \frac{1}{2}(V - U) \quad (21)$$

$$\text{bzw. } U = T - X \text{ und } V = T + X \quad (22)$$

bekommen wir schließlich die so genannte Kruskal-Szekeres Metrik, wie sie 1960 das erste Mal von Martin Kruskal und George Szekeres eingeführt wurde

$$\boxed{ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right) (dT^2 - dX^2)}. \quad (23)$$

Wie eingangs versprochen ist hier $r = r_s$ kein singulärer Punkt mehr. Die Singularität bei $r = 0$ ist nach wie vor vorhanden.

Weil $r > r_s$ und $t > 0$ waren, ist diese Lösung vorerst nur für $T < 0$ und $X > 0$ gültig. Jedoch lässt sich die Kruskal-Szekeres Metrik analytisch auch auf die Bereiche $X < 0$ und $T > 0$ fortsetzen, sodass sie die maximale Erweiterung der Schwarzschild Metrik darstellt.

2.4 Das Kruskal Diagramm

Nun wollen wir ein T-X-Diagramm zur Diskussion der Kausalität erstellen. Dafür betrachten wir zuerst

$$UV = -\exp\left(\frac{1}{2r_s}(v - u)\right) = -\exp\left(\frac{1}{2r_s}(2r^*)\right) = \quad (24)$$

$$= -\exp\left\{\frac{1}{r_s}\left[r + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)\right]\right\} = \quad (25)$$

$$= \left(1 - \frac{r}{r_s}\right) \exp\left(\frac{r}{r_s}\right) = T^2 - X^2. \quad (26)$$

Gleichung 26 ist zum einen die implizite Definition der Funktion $r(T, X)$, zum anderen ist an ihr zu sehen, dass $T^2 - X^2 = 1$ für $r = 0$, was zwei Hyperbeln, eine in der oberen und eine in der unteren Hälfte des X-T-Diagramm, entspricht. Allgemein ergeben sich aus der Gleichung 26 für $r = \text{const.}$ Hyperbeln der Form $T^2 - X^2 = C$, wobei das Vorzeichen der Konstanten C dadurch bestimmt ist, ob r größer oder kleiner r_s ist. Im Grenzfall $r = r_s$ folgt $T^2 - X^2 = 0$. Dies ist äquivalent zu $|X| = |T|$, und somit zu den winkelhalbierenden Geraden zwischen X- und T- Achse.

Durch die zusätzliche Analyse von

$$\frac{T}{X} = \frac{U + V}{V - U} = \tanh\left(\frac{t}{2r_s}\right) \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{r_s} = 2 \operatorname{artanh}\left(\frac{T}{X}\right) \quad (28)$$

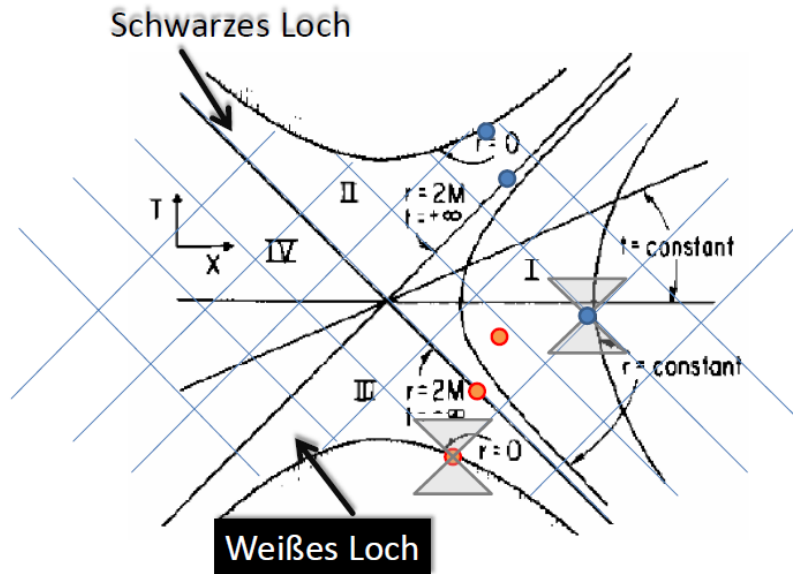


Abbildung 1: Kruskal-Szekeres Diagramm (frei nach [Geb]). Punkte konstanter Schwarzschild-Zeit t bilden Ursprungsgeraden, während Punkte konstanten Ortes r in Schwarzschild-Koordinaten Hyperbeln bilden. Der Ereignishorizont bei $r = r_s$ wird gegeben durch zwei Ursprungsgeraden, welche zusätzlich die Winkelhalbierenden zwischen X und T Achse sind. Null-Geodäten sind durch blaue Linien mit Steigung ± 1 demonstriert. Zur Interpretation betrachten wir ein fallendes, Licht emittierendes Teilchen (blau) bzw. (orange).

wird deutlich, dass $|T| = |X|$ neben $r = r_s$ zudem $t = \pm\infty$ in Schwarzschildkoordinaten entspricht. Dies würde bedeuten, dass ein einfallendes Teilchen unendlich Zeit bräuchte, um den Schwarzschildradius zu erreichen. Allerdings ist das ein Artefakt der Schwarzschild Koordinaten, denn ein fallendes Teilchen benötigt dafür nur endliche Eigenzeit τ und auch nur endliche Koordinaten-Zeit in Kruskal-Szekeres Koordinaten. Außerdem zeigt sich mit Gleichung 28, dass $t = \text{const.}$ äquivalent ist zu $T/X = C'$ mit einer Konstanten C' . Somit liefern konstante t Ursprungsgeraden $T = C'X$ im Diagramm.

Untersuchen wir zuletzt noch das Verhalten von Null-Geodäten im Kruskal-Szekeres Diagramm, so sehen wir mit Gleichung 23, dass $ds^2 = 0$ für $dX = \pm dT$ erfüllt ist. Dies entspricht Geraden mit einer Steigung von eins im T - X -Diagramm, welche im Allgemeinen nicht durch den Ursprung verlaufen. Die Lichtkegel im Kruskal-Szekeres Diagramm sind damit Kegel mit einem Öffnungswinkel von 90° , ebenso wie im Minkowski-Diagramm der Speziellen Relativitätstheorie.

Trägt man all dies zusammen, ergibt sich der Graph im Bild 1.

3 Interpretation des Kruskal Diagramms

Nun wollen wir uns die Eigenschaften der Gebiete I bis IV genauer ansehen, wobei wir uns an [Geb] und [Goe96] orientieren.

Region I: Dies ist die uns mit Messinstrumenten zugängliche Welt, welche asymptotisch flach ist, d.h. die Metrik geht für sehr große Abstände zu r_s gegen die Minkowski-Metrik. Lässt ein Beobachter auf einer der Hyperbeln mit konstantem Radius r_0 ein Licht emittierendes Teilchen fallen, so bewegt sich dieses immer innerhalb des lokalen Lichtkegels. Dieser wird an jeder Stelle von den ein- und auslaufenden Null-Geodäten, die Geraden mit der Steigung +1 (auslaufend) bzw. -1 (einlaufend) darstellen, aufgespannt. Solange für das fallende Teilchen $X < T$ gilt, bzw. $r > r_s$, so trifft die auslaufende Null-Geodäte in endlicher Zeit t auf die Hyperbel mit $r = r_0$. Es ist noch zu beobachten. Der einlaufende Lichtstrahl trifft auf die Singularität bei $r = 0$.

$T = X$: Erreicht das Teilchen $T = X$ ($\leftrightarrow r = r_s$), so stimmt die auslaufende Null-Geodäte exakt mit der Geraden $T = X$, die Region I von Region II trennt, überein. Weil sich die Hyperbeln konstanten Radius asymptotisch an diese Gerade anschmiegen, trifft der auslaufende Lichtstrahl nicht mehr in endlicher Zeit auf unseren Beobachter. Das Teilchen lässt sich nicht mehr observieren. Es befindet sich am Ereignishorizont, einer Hyperfläche, die lichtartige Richtungen enthält. Dies bedeutet, dass Licht, welches am Ereignishorizont in Richtung dieser Hyperfläche ausgesandt wird, dort unendlich lange gefangen bleibt. Somit stellt der Schwarzschildradius die Entfernung zum Gravitationszentrum dar, an der die Ablenkung so stark wird, dass Licht um das Zentrum gebogen wird und gerade noch nicht in die Singularität „fällt“. Natürlich ist diese Diskussion nur sinnvoll für Gravitationsquellen, deren Radius kleiner als ihr eigener Schwarzschildradius ist. Dies ist bei extrem kollabierter Masse der Fall.

Region II: Unterhalb des Schwarzschildradius befindet sich das Teilchen in der Region II. Hält man sich vor Augen, dass bei $X > T$ sowohl ein-, als auch auslaufendes Licht den Ereignishorizont nicht mehr durchquert, sondern auf die Singularität bei $r = 0$ trifft, so wird klar, warum der Ereignishorizont oft als „semipermeable Membran“ bezeichnet wird. Zudem ist die kausal erreichbare Zukunft der Lichtkegel an jeder Punkt in der Region II innerhalb der Region II selbst. Dies verdeutlicht, warum dieser Bereich „**Schwarzes Loch**“ genannt wird.

Region III: Auch der Bereich III ist nicht mit Messinstrumenten erreichbar. III stellt das Zeit-inverse zu Region II dar. So hat hier jeder erdenkliche Lichtkegel, seine kausale Vergangenheit innerhalb von III. Massive Teilchen und Licht werden in der Singularität geboren und verlassen die Region III durch die „semipermeable Membran“ bei $X = -T$ in die Region I. Jedoch konnte man solch ein „**Weißes Loch**“, welches enorm viel Strahlung emittieren müsste, bisher nicht experimentell beobachten.

Region IV: Der experimentell unzugängliche Bereich IV, sollte ähnliche Eigenschaften haben wie Region I. So ist auch er asymptotisch flach. Die Schwarzschild-Raumzeit wird in mancher Literatur als Wurmloch zwischen den kausal getrennten Bereichen I und IV interpretiert.

$r = 0$: Die Singularität bei $r = 0$ ist nicht durch Koordinaten Transformationen aufzuheben. Sie stellt die einzige Berandung der Mannigfaltigkeit der Schwarzschild-Raumzeit dar.

Nur Region I wird auch durch Schwarzschildkoordinaten (t,r) beschrieben. Dass die Kruskal-Szekeres Koordinaten die maximale Erweiterung davon darstellt, bedeutet, dass jede Geodäte in jede Richtung beliebig weit erweiterbar ist, es sei denn, sie stößt auf die Singularität.

4 Diskussion der Interpretation

Obwohl die Schwarzschild-Raumzeit in Kruskal-Szekeres Koordinaten eine valide Lösung der Einsteingleichung darstellt, müssen die Interpretationen der Regionen II bis IV kritisch hinterfragt werden.

Zum einen sind die Bereiche II und IV aus unserer Heimat, dem Bereich I, experimentell nicht zugänglich und die Region III, das „weiße Loch“, wurde nie beobachtet. Zum Anderen beschreibt die Schwarzschild-Raumzeit lediglich nicht rotierende, ungeladene, sphärisch symmetrische Massen, was die Anwendbarkeit der Lösung auf die Realität stark einschränkt.

Nichts desto weniger lassen sich vor allem durch Abbildung 1 leicht Einblicke gewinnen, was sich jenseits des Ereignishorizonts befinden könnte. Leider wird dieser Konjunktiv bis auf weiteres bestehen bleiben.

5 Zusammenfassung

Nachdem wir uns in Abschnitt 2.1 die Unbeschränktheit von g_{11} bei $r = r_s$ in Schwarzschild Koordinaten (t,r) vor Augen geführt haben, konnten wir diese in den Paragraphen 2.2 und 2.3 durch eine geeignete Wahl des Koordinatensystems, den Kruskal-Szekeres Koordinaten (T,X) , aufheben. Durch eine genauere Betrachtung der Transformation im Abschnitt 2.4, wurde das Kruskal-Szekeres Diagramm eingeführt. Darauffolgend wurde Anhand dieser Graphik die Kausalität der Schwarzschild Raumzeit erörtert und anschließend mit Hinblick auf Anwendbarkeit diskutiert.

Literatur

- [Geb] Wolfgang Gebhardt. “Black Holes, Neutron Stars and other Exotica”. Spezialvorlesung WS 2010/2011, Universität Regensburg.
- [Goe96] H. Goenner. *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum. Akademischer Verlag, 1996.
- [Har14] Daniel Harlow. “Jerusalem Lectures on Black Holes and Quantum Information”. In: *arXiv* (2014).
- [HH15] Christian Heinicke und Friedrich W. Hehl. “Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein’s Field Equation - an introduction-”. In: *arXiv* (2015).