Die kosmologische Konstante
Ausbildungsseminar Sterne und Teilchen im WS08/09

Andreas Scholz

31. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit soll das Problem der kosmologischen Konstante besprochen werden. Ursprünglich als Notbehelf eingeführt und einige Jahre später wieder verworfen, sieht man ihr nicht die fundamentale Bedeutung an. Sie stellt ein ungelöstes Rätsel der Astro- und Teilchenphysik dar, nicht zuletzt weil sich die theoretischen und gemessenen Werte zwischen 50 und 120 Zehnerpotenzen unterscheiden. Auch ihr ungeklärter Urpsrung stellt ein ebenso großes Problem dar.

2 Einsteins Idee der kosmologischen Konstante

2.1 Einführung des Λ-Terms

1917, gut ein Jahr nach Veröffentlichung der Allgemeinen Relativitätstheorie, ergänzte Albert Einstein seine Feldgleichungen um einen Term, den sogenannten kosmologischen Term. Dieser führt einen Parameter - die kosmologische Konstante Λ - ein, der in den letzten zehn Jahren zu einem der großen ungelösten Probleme der Physik geworden ist. Einsteins ursprüngliche Motivation für diesen Term war die Tatsache, dass eine statische Lösung für unser Universum mit seinen Ursprungsgleichungen nicht möglich war, so wie es damalige experimentelle Befunde zumindest vermuten ließen. Außerdem sollte eine Modifikation der Feldgleichungen das Machsche Prinzip erfüllen. Dieses besagt nämlich, dass Trägheitskräfte alleine durch die Wechselwirkung mit anderer Materie zustande kommen. Dies aber scheint widersprüchlich zum Äquivalenzprinzip der ART zu sein, nachdem Gravitationskräfte äquivalent zu Trägheitskräften sind. Vakuumlösungen wären damit undenkbar. Nun ist jedoch der Minkowskiraum Vakuumlösung der Feldgleichungen, das Einfügen von Λ hingegen verhindert dies. Trotzdem ergibt sich für einen offenen Raum, durch Ansetzen willkürlicher Randbedingungen, ein nicht verschwindendes Gravitationsfeld, was das Machsche Prinzip verletzt. 1917 konnte de Sitter schließlich zeigen, dass auch für $\Lambda \neq 0$ im geschlossenen Raum eine Vakuumlösung existiert, wodurch auch Einstein seine Bestrebungen zum Erhalt des Machschen Prinzips verworfen hat.

2.2 Auswirkungen auf die Friedmanngleichungen

Eine Diskussion der Friedmanngleichungen zeigt (siehe weiter unten), dass Λ zwar ein statisches Universum ermöglicht, dieses jedoch instabil ist (siehe Abbildung 1) und eine kleine Änderung um Λ_{krit} sofort zur Expansion bzw. Kontraktion führt.

In den 1920er und 1930er Jahren wurde die Dynamik des Universums von Lemaitre und Hubble untersucht, wobei hierbei die Hubble-Expansion entdeckt wurde. Demnach expandiert der Kosmos, was jedoch nicht als eine Relativbewegung der Galaxien zu verstehen ist, sondern als eine Vergrößerung des Raumes.

Die Notwendigkeit eines kosmologischen Terms ging damit verloren. Albert Einstein soll in späteren Jahren von diesem als seine "größte Eselei"gesprochen haben. Dennoch ist der Zusatzterm $\Lambda \cdot g_{\mu\nu}$ trotz experimentell beobachteter Expansion keineswegs uninteressant. Einerseits bringt er die Feldgleichungen auf ihre allgemeine Form, andererseits waren Werte $\Lambda \neq \Lambda_{krit}$ durchaus denkbar.

Betrachtet wird das Friedmannmodell mit kosmologischem Zusatzterm (im folgenden wird $c = 1$ gesetzt):

$$\dot{R}^2 - \frac{K_s}{R^2} - \frac{K_m}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3} = -k$$

oder

$$\dot{R}^2 + V(R) = -k$$

wobei $K_m = \frac{8\pi G}{3}\rho_m R^3 = const$ und $K_s = \frac{8\pi G}{3}\rho_s R^4 = const$ ist.

Das Potential $V(R)$ ist in Abbildung 1 dargestellt

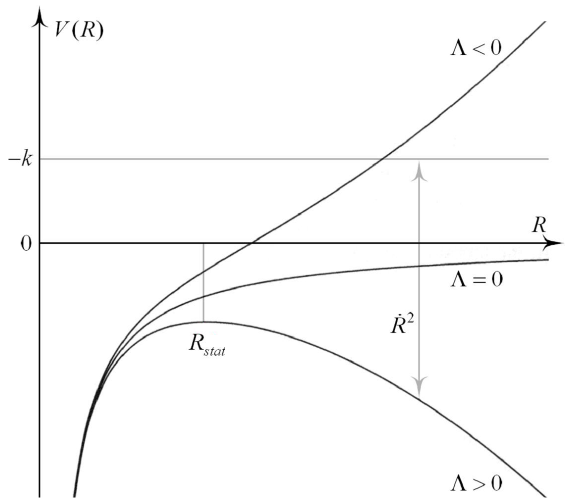

Abb. 1: Verlauf des Potentials $V(R)$ für verschiedene Λ

Das effektive Potential $V(R) = -\frac{K_s}{R^2} - \frac{K_m}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}$ hängt dabei wesentlich vom Vorzeichen von Λ ab:

- Vernachlässigt man den Strahlungsanteil (welcher zwar im frühen Universum dominierend war, heute allerdings vernachlässigbar ist), so lässt sich der kritische Wert für den positiv gekrümmten Raum bestimmen

$$\frac{dV(R)}{dR} = 0 \text{ und } V = -k = -1$$

$$=> \frac{2K_m}{R^2} - \frac{2\Lambda R}{3} = 0 \text{ und } 1 = -\frac{K_m}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}$$
$$=> \Lambda_{krit} = \frac{4}{9K_m^2} \text{ und } R_{stat} = \frac{3K_m}{2}$$

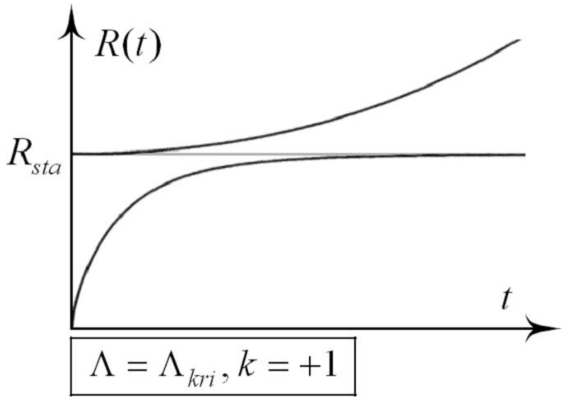

Abb. 2: Stationäre aber instabile Lösung der Feldgleichungen

- Falls $0 < \Lambda < \Lambda_{krit}$ sowie $k = 1$ ist, so existieren die Möglichkeiten einer ungebundenen Lösung für $R > R_2$ oder einer periodischen Lösung zwischen 0 und R_1. Die Punkte R_1 und R_2 sind dabei die beiden Schnittpunkte der Geraden k=1 mit $V(R)$.

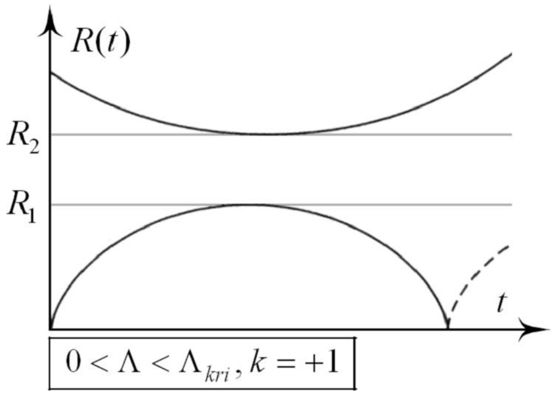

Abb. 3: Darstellung von R(t) für den Fall $0 < \Lambda < \Lambda krit$

- Im Fall $\Lambda > \Lambda_{krit}$ und k=1 kommt es im Bereich des Maximums von $V(R)$ zur Verzögerung der Expansion, anschließend steigt sie allerdings wieder an.

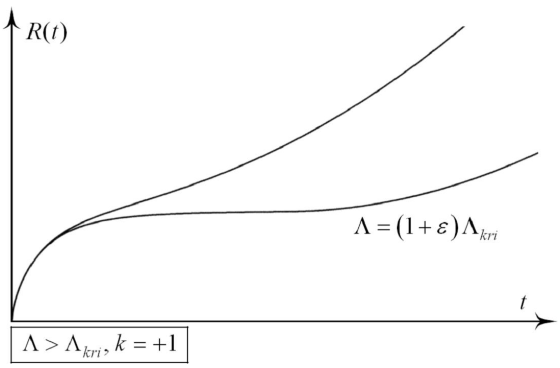

Abb. 4: R(t) für den Fall $\Lambda > \Lambda_{krit}$

- Der Fall $\Lambda < 0$ hat ein maximales R und führt zu einer periodischen Bewegung zwischen $R = 0$ und $R = R_{max}$. Sowohl der Extremalwert R_{max} wie auch die Periodizität hängen dabei vom Krümmungsparameter ab.

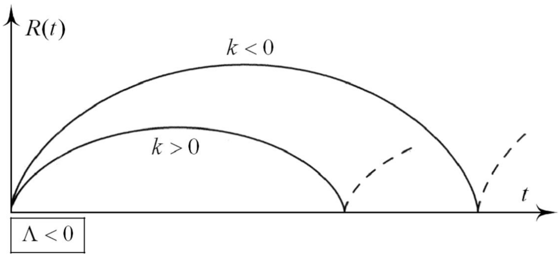

Abb. 5: Verlauf der Kurve R(t) für den Fall $\Lambda < 0$

- Die Möglichkeiten einer verschwindenden kosmologischen Konstante sind in nachfolgender Abbildung skizziert. Setzt man $K_s \approx 0$, so ergibt sich für $V(R) = -\frac{K_m}{R}$ und $\dot{R}^2 + V(R) = -k$ eine gebundene Lösung falls k=1. Für k=-1 nähert sich $\dot{R}(t)$ wegen $V(R) \propto \frac{1}{R}$ für $R \to \infty$ gegen einen konstanten Wert. Das Einstein-de Sitter Universum wiederum ist der Fall mit $k = 0$, wobei hier für große R die Expansionsgeschwindigkeit gegen Null geht, d.h. $\dot{R} \to 0$.

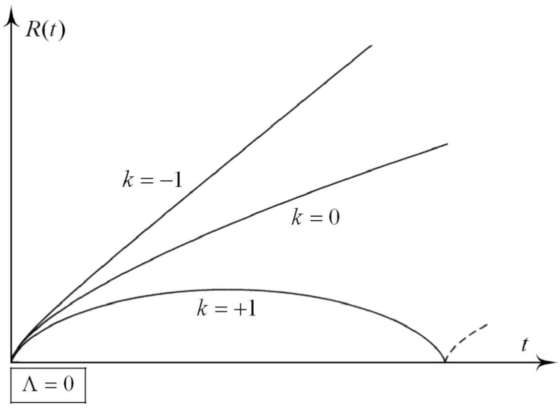

Abb. 6: R(t) für verschwindende kosmologische Konstante

Trotz dieser interessanten Möglichkeiten verschwand die kosmologische Konstante jedoch zwischen 1930 und 1998 zum Großteil aus den Diskussionen. Der Grund hierfür war schlichtweg, dass sie einen weiteren Parameter in die (sowieso schon nicht ganz leicht lösbaren) Einstein-Gleichungen einfügt. Ein anderer Grund für ihre Nichtbeachtung liegt in der Tatsache, dass eine sehr wichtige Eigenschaft, die bei der Aufstellung der EG eine Rolle spielte, durch den kosmologischen Zusatzterm $\Lambda g_{\mu\nu}$ verloren geht - die Reduktion der Feldgleichungen auf den Newtonschen Grenzfall. Da dieser jedoch kaum zu Verleugnen ist, muss man für Λ einen kleinen Wert voraussagen, so dass sie sich erst auf sehr großen Skalen bemerkbar macht. Eine solche Abschätzung wäre beispielsweise, dass durch Λ bedingte Änderungen erst bei Größenordnungen, die vergleichbar mit dem

Durchmesser der Michstraße sind, signifikant werden:

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} > 10^5 lya$$

oder

$$\Lambda < 10^{-42} \frac{1}{m^2}$$

wobei $1lya \approx 9.46 \cdot 10^{15} m$ einem Lichtjahr entspricht.

2.3 Renaissance des kosmologischen Terms

1998 wurde anhand von Supernovae Ia entdeckt, dass die Beschleunigung des Universums zunimmt und nicht, wie erwartet aufgrund der Anziehung von Materie, abnimmt. Man muss also über einen Mechanismus nachdenken, der antigravitativ wirkt.

Betrachtet man hierzu erneut das Potential

$$V(R) = -\frac{K_s}{R^2} - \frac{K_m}{R} - \frac{\Lambda \cdot R^2}{3}$$

so sieht man, dass sich die resultierenden Kräfte ($F = -\frac{dV}{dR}$) des Materie- und Λ-terms im Vorzeichen unterscheiden ($K_s \approx 0$):

$$\frac{dV}{dR} = \frac{K_m}{R^2} - \frac{2\Lambda R}{3}$$

Expandiert das Universum, so folgt aus der Energieerhaltung:

$$\Delta E = 0 = (\rho_\Lambda + p_\Lambda)\Delta V$$

$$\Rightarrow p_\Lambda = -\rho_\Lambda < 0$$

$\boxed{\text{Die kosmologische Konstante wirkt also wie ein negativer Druck.}}$

Dies ist auch ersichtlich, wenn man sich die Einstein-Gleichungen und die Robertson-Walker-Metrik ansieht:

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = diag(1, -\frac{R(t)^2}{1 - kr^2}, -R(t)^2 r^2, -R(t)^2 r^2 sin^2(\theta))$$

Nimmt man nun den kosmologischen Term mit in den Energie-Impuls-Tensor auf, so ergibt sich ein Zusatz der Form

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{8\pi G} = T_{\mu\nu} + diag(\epsilon_\Lambda, -p_{\Lambda 1}, -p_{\Lambda 2}, -p_{\Lambda 3})$$

Mit $p_{\Lambda i}, \epsilon_\Lambda > 0$, $\epsilon_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ und $p_{\Lambda i}$ ergibt sich aus g_{ii}. ϵ_Λ bezeichne die Energiedichte der "dunklen Energie", nicht zu verwechseln mit der "dunklen Materie", welche gravitativ anziehend wirkt.

Die beschleunigte Expansion lässt sich also prinzipiell mit Hilfe der Ëselei"Λ beschreiben (entsprechendes Vorzeichen vorausgesetzt). Diese hat antigravitativen Charakter und ist perfekt homogen (!) im Raum verteilt, d.h. es ist nicht möglich, ihre abstoßende Wirkung auf die Planeten oder Lichtstrahlen direkt zu bestimmen. Die naheliegende Frage, um was es sich dabei handeln könnte, wird im nächsten Kapitel behandelt. Hier soll nun eine Diskussion der globalen Bewegung des Universums folgen, sowie eine kurze Darstellung der aktuellen kosmologischen Daten.

Betrachtet wird wieder das Friedmann-Modell (der Strahlungsterm soll erneut vernachlässigt werden):

$$\dot{R}^2 - \frac{K_m}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3} = -k \tag{1}$$

Multipliziert man (1) mit $\frac{R_0^2}{H_0^2}$ und definiert $a = \frac{R(t)}{R_0}$; $H_0 = \frac{\dot{R}(t)}{R(t_0)}$; $\tau = H_0 t$, so folgt:

$$\boxed{\Rightarrow (\tfrac{da}{d\tau})^2 - \tfrac{\Omega_m}{a} - \tfrac{\Omega_\Lambda}{a^2} = \Omega_k} \tag{2}$$

mit den Größen

$$\Omega_m = \frac{\rho_{mat}(t_0)}{\rho_{krit}(t_0)};\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2};\ \Omega_k = -\frac{k^2}{R_0^2 H_0^2};\ \rho_{krit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 0.93 \cdot 10^{-26}\,\frac{kg}{m^3}$$

ρ_{krit} ist die sogenannte kritische Massendichte, bei der die Raumzeit flach ($k = 0$) ist. Eine Abweichung von ρ_{krit} führt zu einem offenen bzw. geschlossenem Raum.

Aus der Definition des Skalenfaktors $a(t)$ folgt sofort:

$$a(t = t_0) = 1$$

sowie

$$\left.\frac{da}{d\tau}\right|_{t=t_0} = 1$$

was die wichtige Relation ergibt:

$$\boxed{\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1}$$

Das Besondere an Gleichung (2) ist, dass man ihr sofort ansieht, wie die $\Omega_{k,m,\Lambda}$ die Expansion des Universums beeinflussen.

Eine weitere Größe, die auch experimentell zugänglich ist, ist der Verzögerungsparameter q_0, welcher angibt ob und wie schnell sich die Expansion beschleunigt ($q_0 < 0$) bzw. verlangsamt ($q_0 > 0$). Dieser ist definiert durch:

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}(t_0)R_0}{\dot{R}(t_0)^2}$$

Leitet man nun Gleichung [1] nach der Zeit ab, so ergibt sich:

$$2\dot{R}\ddot{R} + \frac{K_m \dot{R}}{R^2} - \frac{2}{3}\Lambda R\dot{R} = 0$$

Multipliziert man dies mit $\frac{R}{\dot{R}^3}$ und wählt $t = t_0$ so folgt:

$$\boxed{q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda}$$

Der Zustand unseres heutigen Universums wird also durch die 5 Parameter Ω_m, Ω_Λ, Ω_k, q_0 und H_0 bestimmt, wobei aufgrund der obigen beiden Bedingungen nur 3 davon unabhängig sind.

Die experimentellen Daten für diese Größen sind (entnommen aus [7]):

1. $q_0 = -0.59 \pm 0.03$ für den Verzögerungsparameter sowie $H_0 = (72 \pm 8)\frac{km/s}{MPc}$ für den Hubble-Parameter. Diese Daten stammen größtenteils vom Hubble-Space-Teleskop und wurden mit Hilfe der Rotverschiebungs-Abstands-Relation

$$z_{kosm} \approx H_0 D + \frac{(1+q_0)H_0^2}{2} D^2$$

durch Beobachtungen von Supernovae Ia bestimmt. D ist dabei der heutige Abstand zwischen Emissions- und Absorptionsort.

2. Die Bestimmung der Materiedichte Ω_m ist schwierig. Früher hat man versucht, sie über die Bewegung der Galaxienhaufen zu bestimmen. Das Ergebnis war allerdings nicht sehr genau. Heute wird Ω_m vor allem über die kosmische Hintergrundstrahlung gemessen. Der Anteil an dunkler Energie ergibt sich dann aus Ω_k sowie Ω_m. 2007 wurde ein Mikrowellen Teleskop am Südpol in Betrieb genommen mit dem nach Schatten im Spektrum der CMB gesucht wird. Dieser wiederum lässt Rückschlüsse auf bisher unbekannte Galaxienhaufen zu.

3. Die räumliche Krümmung unseres heutigen Universums erhält durch Messung der Anisotropie der Hintergrundstahlung. Diese wurde in Langzeitexperimenten untersucht und ergab das Ergebnis, dass $\Omega_k = -0.023^{+0.017}_{-0.050} \approx 0$ ist, d.h. unser Universum ist zum heutigen Zeitpunkt nahezu flach.

   Die Abbildung unten zeigt eine Aufnahme der Anisotropie, wobei die roten und blauen Punkte geringe Abweichungen vom Mittelwert (grün) darstellen:

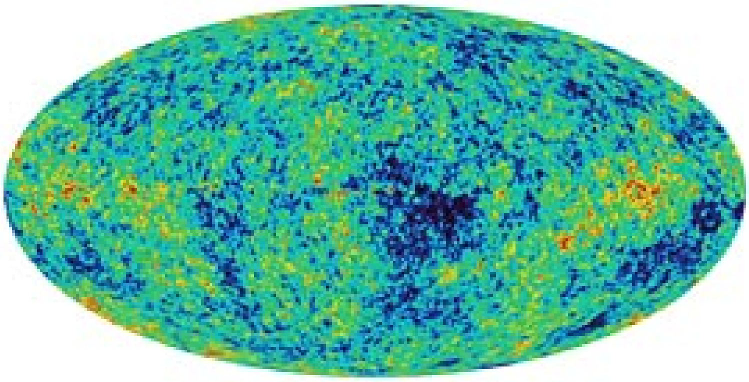

Abb. 7: Ergebnis aus Messungen der Anisotropie der Hintergrundstrahlung

Unser Univerum kann nun zum Beispiel mit Hilfe der Parameter $(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k)$ beschrieben werden, wobei nach experimentellem Kenntnisstand gilt:

$$(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k) = (0.3; 0.7; 0)$$

2.4 Abschätzung des Weltalters

Bis zur Entdeckung 1997, dass die Expansion beschleunigt wird, wurde das Model von Einstein und de Sitter bevorzugt in welchem $(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k) = (1, 0, 0)$ gilt. Dieses Modell hatte schon damals den entscheidenden Nachteil, dass sich die Abschätzung des Weltalters nicht mit dem Alter der ältesten bekannten Sternenhaufen deckte. Erst eine Berücksichtigung des kosmologischen Terms führt auf einen Wert, der damit verträglich ist. Es sei noch angemerkt, dass unter dem Weltalter die Zeitspanne zwischen heute und der Singularität im Friedmannmodel gemeint ist.

Betrachtet wird nun die Friedmann-Gleichung mit Strahlungsterm und Krümmung:

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = H_0^2(\frac{\Omega_s}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \Omega_\Lambda) = H_0^2 \cdot E(a)^2$$

$$\Rightarrow dt = \frac{da}{H_0 \cdot a\sqrt{\frac{\Omega_s}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \Omega_\Lambda}}$$

$$\Rightarrow H_0 \cdot t = \int_0^a \frac{da}{a\sqrt{\frac{\Omega_s}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \Omega_\Lambda}}$$

Dieses Integral lässt sich unter den vereinfachende Annahmen $\Omega_s = 0$ und $\Omega_k = 0$ analytisch lösen. Eine numerische Berechnung mit allen Parametern ergibt für $a = 1$ das Weltalter T:

$$T_{Welt} = 0.964 \cdot H_0^{-1} \approx 13.7 \cdot 10^9 a$$

Dieses Ergebnis passt gut zu den experimentellen Daten.

Die Abschätzung im Fall reiner Materiedichte ($\Omega_m = 1$) liefert hingegen einen kleineren Wert:

$$T_{Welt} = \int_0^1 da\sqrt{a}\frac{1}{\sqrt{\Omega_m} \cdot H_0} = \frac{2}{3 \cdot H_0} \approx 9.3 \cdot 10^9 a$$

Die Auswirkungen einer kosmlogischen Konstante auf das Weltalter sind in der nachfolgenden Abbildung skizziert:

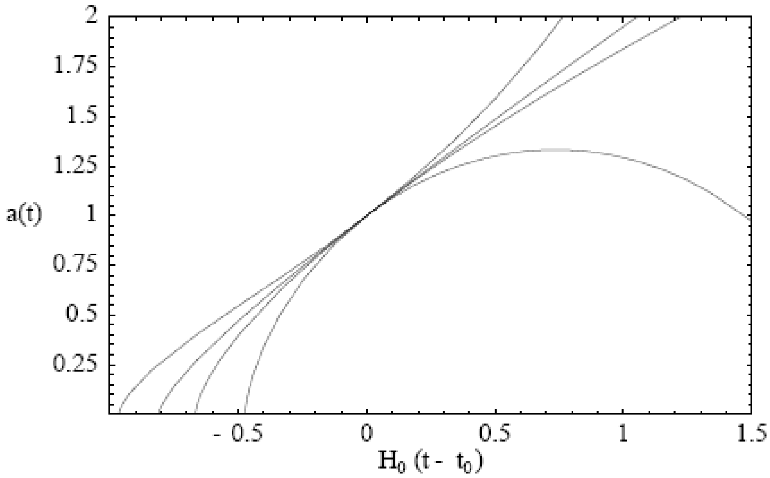

Abb. 8: Die Kurven entsprechen, von oben nach unten, der Wahl $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.3; 0.7), (0.3; 0.0), (1.0; 0.0), (4.0; 0.0)$.

Wie man sieht, nimmt das Weltalter ab wenn Ω_m größer wird und zu, wenn Ω_Λ größer wird. Dies erklärt sich dadurch, dass ein positives Λ beschleunigend wirkt, weshalb die Expansion früher geringer gewesen sein muss. Eine größerer Wert der Materiedichte hingegen führt zur Verzögerung der Expansion, weshalb diese früher größer gewesen sein muss und damit der Zeitpunkt der Singularität näher ist.

3 Die kosmologische Konstante heute

Die kosmologische Konstante löst also einige Probleme auf, wie die Beschleunigung der Expansion oder das oben beschriebene zu kleine Weltalter, sie bringt aber zwangsläufig auch einige Fragen auf. Die wohl wichtigste dabei ist - was ist die physikalische Bedeutung von Λ?

3.1 Λ in der Quantenfeldtheorie

Da die Dichte $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ bei der Expansion konstant bleibt, wäre eine mögliche Interpretation von Λ, sie mit den Vakuumfluktuationen in Verbindung zu bringen. Betrachtet man hierzu einen quantenmechanischen Oszillator, so ergibt sich als Konsequenz des

Unschärfeprinzips eine von Null verschiedene Grundzustandsenergie $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, den sogenannten Nullpunktschwingungen. Dieser Wert macht sich in einer Feldtheorie, die die Gravitaion ausschließt nicht bemerkbar, da nur Energiedifferenzen gemessen werden (z.B. im Casimir-Effekt). Mit Gravitation hingegen hat sie einen direkten Einfluss. Die Vakuumenergie besteht aus Anteilen beliebiger Frequenzen. Das Resultat ist, dass sie divergiert. Um diese Divergenz zu vermeiden, benötigt man einen Abschneideparameter, eine mögliche Wahl ist die Plancksche Frequenz. Hier sind Comptonwellenlänge und Schwarzschildradius von derselben Größenordnung, weshalb eine Feldtheorie ohne Gravitation sicher versagt.

Für die Vakuumenenergie ergibt sich dann

$$E_0 = \sum\nolimits_n \frac{\hbar\omega_n}{2} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar V k_{Pl}^4}{16\pi^2}$$

mit $k_{Pl} \propto \frac{1}{\sqrt{\hbar G}}$ folgt:

$$\rho_{vak} = \frac{E_0}{V} \propto \frac{1}{\hbar G^2} \approx 5 \cdot 10^{96} \frac{kg}{m^3}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit den beobachteten Werten $\Omega_\Lambda = 0.7$ und verwendet $\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \cdot \rho_{krit}$, so folgt

$$\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \cdot \rho_{krit} = 6 \cdot 10^{-27} \frac{kg}{m^3}$$

Dies liefert wiederum

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\rho_\Lambda^{exp}}{\rho_\Lambda^{theo}} = 10^{-123}}$$

Dieser enorm große Unterschied zwischen Theorie und Experiment wird als "*cosmological constant problem*" bezeichnet.

Ein naheliegender Ansatz zur Lösung dieses Problems wäre, den *Cut-Off* Parameter zu verändern. Wählt man hierzu Größen aus der starken oder schwachen Theorie, so ergeben sich

$$\rho_\Lambda^{EW} \approx 10^{33} \frac{kg}{m^3}$$

bzw.

$$\rho_\Lambda^{QCD} \approx 10^{24} \frac{kg}{m^3}$$

Wie man nun sieht, ist der Unterschied zwar deutlich geringer, liegt mit 60 Größenordnungen aber immer noch sehr daneben.

Die Identifikation des Λ-Terms mit der Vakuumenergiedichte wird noch deutlicher, wenn man ein skalares Feld ϕ betrachtet. Für die Wirkung ergibt sich:

$$S = \int d^4x \sqrt{det(g)}[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi)]$$

Mittels Variation erhält man nun der Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}(g^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi)g_{\mu\nu} + V(\phi)g_{\mu\nu}$$

Vakuumenergie bedeutet nun niedrigster Energiezustand, d.h. kinetische und potentielle Energie verschwinden: $\partial_\mu\phi = 0$. Im Allgemeinen gibt es jedoch keinen Grund, weshalb $V(\phi)$ hier verschwinden sollte. Somit bleibt übrig

$$T^{vac}_{\mu\nu} = V(\phi_0)g_{\mu\nu}$$

wobei $V(\phi_0)$ das Minimum von $V(\phi)$ ist.

Der Effekt des Skalarfeldes ϕ kann auch als kosmologische Konstante interpretiert werden, wenn man setzt:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} = V(\phi_0)$$

Vergleiche hierzu die Feldgleichung:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

Neben den oben erwähnten möglichen Beiträgen zur Vakuumenergie, also der Anwesenheit eines skaleren Potentials und den Vakuumfluktuationen, gibt es noch einen dritten. Dieser entsteht, wenn man in die Lagrangedichte und damit in das Wirkungsintegral eine Konstante Λ_0 einfügt:

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{det(g)}(R - 2\cdot\Lambda_0)$$

Variation dieses Integrals führt wieder zur Einsteinschen Feldgleichung - und damit auch zu einem weiteren Beitrag im Energie-Impuls-Tensor. Λ_0 wird auch als "nackte"kosmologische Konstante bezeichnet.

Aufgrund der hohen, theoretisch berechneten, Energiedichte des Vakuums ist es naheliegend, dass die feldtheoretische Abschätzung so nicht richtig sein kann. Man muss davon ausgehen, dass entweder eine unbekannte Symmetrie existiert oder die Gravitation bei der Berechnung früher berücksichtigt werden muss. Obwohl sich die Daten aus Supernovae Ia Experimenten mit $\Lambda = 0$ nicht erklären lassen, sollte man auch über diese Möglichkeit nachdenken.

3.2 Supersymmetrische Betrachtung

Betrachet wird nun das Problem der kosmologischen Konstante in einer supersymmetrischen Theorie. Die SUSY, die in den 1970er Jahren aus der Stringtheorie heraus entstanden ist, mittlerweile aber auch Anwendung in der Quantenfeldtheorie findet, sagt eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen voraus. Zu jedem Teilchen gibt es einen supersymmetrischen Partner, wodurch sich die Zahl der Elementarteilchen verdoppelt. Bosonen können mittels supersymmetrischen Generatoren in Fermionen umgewandelt werden und umgekehrt. Die Komponenten dieses Generators sind die Superladungen Q_α. Zustände, die von den Superladungen vernichtet werden

$$Q_\alpha |\psi\rangle = 0$$

(wobei α ein Spinor Index ist) sind supersymmetrisch. Für Zustände, in denen diese gebrochen ist, gilt:

$$Q_\alpha |\psi\rangle \neq 0$$

Die Gesamtenergie des Systems, $H = \sum_\alpha \{Q_\alpha, Q_\alpha^t\}$ hat in einer SUSY-Theorie eine absolute Bedeutung. Für SUSY Zustände gilt $\langle\psi |H| \psi\rangle = 0$.
Es ist möglich, im Rahmen dieser Theorie, die Vakuumenergiedichte, die sich aus dem Anteil eines skalaren Feldes und den Vakuumfluktuationen zusammensetzt, zu berechnen. Für die Fluktuationen heben sich die Beiträge von Fermionen mit denen von Bosonen auf. Das Potential eines Skalarfeldes lässt sich über das sog. Superpotential $W(\phi^i)$ ausdrücken. Man unterscheidtet hierbei zwischen flacher und gekrümmter Raumzeit. Für erstere folgt für das Potential:

$$V(\phi^i, \phi^j) = \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial \phi^i}\right|^2$$

Aus Rechnungen ergibt sich nun die Forderung, dass wenn die Supersymmetrie ungebrochen ist, dann muss auch $\frac{\partial W}{\partial \phi^i} = 0$ gelten, was wiederum $V(\phi^i, \phi^j) = 0$ ergibt.

$\boxed{\textit{In einer supersymmetrischen Theorie im flachen Raum ist also } \Lambda = 0!}$

Da in bisherigen Beschleunigerexperimenten mit $M_{SUSY} \leq 10^3$GeV jedoch keinerlei Anzeichen von SUSY gefunden wurden, kann man $\rho_\Lambda \propto M_{SUSY}^4$ wie folgt abschätzen:

$$\frac{\rho_{SUSY}}{\rho_{vac}^{exp}} \geq 10^{60}$$

Man sieht zwar eine deutliche Verbesserung (vorher bis zu 120 Größenordnungen), der Wert liegt aber trotzdem noch sehr daneben. Zukünftige Experimente, vor allem am LHC, sollen nun nach Supersymmetrie suchen, was uns hoffentlich weitere Aufschlüsse, unter anderem für das Λ-Problem, liefert.

Nun wird der Fall der gekrümmten Raumzeit betrachtet. Hier hängt das Potential $V(\phi^i, \phi^j)$ nicht nur vom Superpotential $W(\phi^i)$, sondern auch vom Kähler-Potential $K(\phi^i, \phi^j)$ ab, welches gegeben ist durch:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial \phi^i \partial \bar{\phi}^j}$$

Für das Gesamtpotential ergib sich

$$V(\phi^i, \bar{\phi}^j) = e^{\frac{K}{M_{Pl}^2}} [K^{ij}(D_i W)(D_j \bar{W}) - \frac{3}{M_{Pl}^2} |W|^2]$$

mit $D_i W = \partial_i W + \frac{1}{M_{Pl}^2}(\partial_i K) W$

Falls ungebrochene SUSY vorliegt, folgt wieder $D_i W = 0$, wodurch der erste Term im Potential wegfällt und $V < 0$ respektive $\Lambda < 0$ folgt.

Dieses Ergebnis ist unvereinbar mit den aktuellen Daten aus der Kosmologie! Es kann zwar sein, dass die Supersymmetrie genauso gebrochen ist, dass sich für Λ der richtige Wert ergibt, aber solche Anpassungen sind einerseits sehr sensibel und andererseits ziemlich willkürlich.

3.3 Stringtheorie

In der Stringtheorie, die alle vier bekannten Wechselwirkungen vereint, werden Teilchen nicht als punktförmig angesehen, sondern als eindimensionale Saiten. Wechselwirkungen entstehen nicht durch Austauschteilchen, sondern die Strings verbinden oder trennen sich. Die meisten Stringtheorien sind nur dann konsistent, falls Supersymmetrie vorliegt. Man kennt fünf solcher Superstringtheorien (Typ I, IIA, IIB, heterotische Theorien basierend auf SO(32) und E(8)xE(8) Symmetriegruppen), es gibt allerdings Vermutungen, dass alle fünf Grenzfälle einer sog. M-Theorie sind. Die Idee, dass die fünf unterschiedlichen Theorien verschiedene Grenzwerte einer solchen M-Theorie sind, beruht auf der Tatsache, dass eine störungstheorische Stringtheorie auf eine andere nicht-störungstheoretische abgebildet werden kann. Alle dieser fünf Theorien benötigen jedoch zehn Raumzeitdimensionen. Um diese nun auf vier zu reduzieren, muss man die Zusatzdimensionen "kompaktifizieren", d.h. sie werden auf kleinstem Raum begrenzt. Die Kompaktifizierung stellt die Raumzeit als ein Produkt einer D-dimensionalen Raumzeit und einer 10-D-dimensionalen Mannigfaltigkeit K_{10-D} dar. Jedes dieser K_{10-D} stellt ein mögliches Stringvakuum dar, der Vakuumzustand ist also nicht eindeutig. Diese Vakuumentartung der K_{10-D}, d.h. die diskrete Wahl topologisch verschiedener Mannigfaltigkeiten, lässt sich bequem auf 10^{500} schätzen. Die Parameter von denen K_{10-D} dabei abhängt sind Volumen oder Form der Mannigfaltigkeit.

Wie im letzten Abschnitt bereits erwähnt, ergibt sich bei ungebrochener Supersymmetrie $\Lambda = 0$. Doch auch wenn diese gebrochen ist, lässt sich, in einer von Kachru, Kumar und Silverstein vorgeschlagenen Theorie, innerhalb der Störungsrechnung $\Lambda = 0$ erreichen. Es könnte nun durchaus sein, dass ein exakter, nicht perturbativer, Wert von 0 abweicht und mit dem kosmologischem Wert verträglich ist. Hier zeigt sich aber bereits das gegenwärtig größte Problem der Stringtheorien. Diese sind nämlich nur im Rahmen einer Störungstheorie bekannt und damit noch nicht ausreichend verstanden wodurch eine Lösung des *cosmological constant problem* momentan nur schwer denkbar erscheint. Eine weitere Herausforderung ist die Vakuumentartung. Es könnte zwar sein, dass diese durch eine (exakte) M-Theorie aufgehoben wird und eventuell *unseren* Weltzustand erklären kann, es kann jedoch auch sein, dass sie dies nicht tut und es viele Möglichkeiten von Grundzuständen gibt - den sogenannten "landscapes".

3.4 Anthropische Argumentationen

Das Anthropische Prinzip, das besagt, dass die Parameter, die unser Universum beschreiben (z.B. Λ, m_e, m_P,... - sog. Feinabstimmung der Konstanten), nicht direkt durch fundamentale Naturgesetze bestimmt werden, sondern durch die Forderung, dass durch sie intelligentes Leben (welches sich erst Gedanken darüber machen kann) möglich sein muss. Bei der Interpretation der kosmologischen Daten muss also die Notwendigkeit der Existenz eines Betrachters berücksichtigt werden. Diese Argumentation scheint einerseits trivial, andererseits nicht sonderlich hilfreich. Hier finden auch die Kritiker des AP ihre Ansatzpunkte, so sind anthropische Argumente leicht zu missbrauchen und die Vorstellung, unsere Welt eher vom Zufall als von Naturgesetzen abhängig zu machen, bringt die Gefahr, die Motivation weiterer Anstrengungen zur Untersuchung unserer Welt zu verlieren.

Doch auch die Stringtheorie lässt uns (zumindest gegenwärtig) eine gewisse anthropische Argumentation offen und wird somit oftmals als eine Art "Bestätigung"(vom physikalischen Standpunkt aus) für das AP angeführt. So gibt es aufgrund der großen Zahl an Grundzuständen die Möglichkeit eines "Multiversums", d.h. neben unserem Universum gibt es noch weitere. Man kann sich dabei vorstellen, dass im Zuge der Inflation ein System aus einem angeregten Zustand in ein Potentialminimun abrollt, wodurch seine Eigenschaften, wie Felder, Stärke der Wechselwirkungen und damit insbesondere auch ρ_m bzw. ρ_Λ, festgelegt werden. Die Möglichkeit der verschiedenen Minima stellt dabei die bereits oben erwähnten "landscapes"dar.

Martel, Shapiro und Weinberg haben in einer Arbeit den Wert der kosmologischen Konstante mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsmaßes berechnet und sind auf ein sehr ansprechendes Ergebnis gekommen. Trotzdem stößt ihre Argumentation auf viel Vorbehalt und Kritik, nicht nur aufgrund der Annahme des anthropischen Prinzips. So argumentierten erst vor einigen Jahren Starkman und Trotta, dass einige der Größen, die bei der Ableitung verwendet wurden, nicht bestimmbar sind, z.B. die Zahl der bewussten Beobachter oder die maximale Zahl von möglichen Beobachtungen.

3.5 Zeitabhängige Skalarfelder

Im vorherigen Kapitel wurde die dunkle Energie als Gesamtheit aller antigravitativ wirkenden Effekte bezeichnet. Wir haben bisher allerdings nur die Bedeutung einer kosmologischen Konstante beachtet (die ja ihren Ursprung im Term $\Lambda g\mu\nu$ in den EG hat), wodurch sich im Energie-Impuls-Tensor ein Zusatz der Form $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ ergab. Ferner wurden mögliche Interpretationen dunkler Energie vorgestellt, genauer Vakuumfluktuationen, zeitunabhängige skalare Felder mit endlichem Minimum und die sog. 'nackte'

kosmologische Konstante (Λ_0-Term im Wirkungsintegral).
Es kann allerdings auch andere Beiträge zur dunklen Energie geben. So lässt sich vorsichtshalber

$$p_\Lambda = w\rho_\Lambda$$

schreiben, wobei $w \in [-1, 0]$ ist.
Für $w \geq 0$ handelt es sich um gewöhnliche Materie, wohingegen $w < -1$ nicht möglich ist, da sich Materie sonst mit Überlichtgeschwindkeit bewegen könnte.

Die momentan gesuchten Theorien sollten $w \approx -1$ liefern (siehe unten), wobei andere Werte durchaus denkbar sind. Eine dieser Theorien geht von einem langsam bewegten Skalarfeld aus, dem "Quintessenzfeld" ϕ und einem entsprechenden Potential $V(\phi)$. Virtuelle Teilchen, die sog. Kosmonen, übertragen dabei eine Kraft. Wir bekommen also eine fünfte Kraft (daher auch der Name 'Quintessenz' = 'fünftes Element'). Dies ist auch einer der wesentlichen Unterschiede zu den drei obigen Interpretationen der dunklen Energie. Insbesondere werden Druck und Dichte zeitabhängig

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

Daraus lässt sich nun w bestimmen:

$$w = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}$$

Für ein zeitlich unabhängiges Quintessenzfeld $\dot{\phi}^2 = 0$ erhält man wieder $w = -1$, für langsam veränderliche, $\dot{\phi}^2 << V(\phi)$ hingegen $w \approx -1$. Der entscheidende Vorteil bezüglich des Λ-Problems ist nun der, dass die kosmologische Konstante tatsächlich 0 sein könnte und die beobachteten Werte vom Quintessenzfeld kommen. Aber auch für $\Lambda \neq 0$ lässt sich ein, mit den kosmlogischen Daten verträglicher, Wert bestimmen - ausreichendes 'fine-tuning' vorausgesetzt. Dieses sehen Kritiker aber problematisch, da es hierfür keine physikalischen Gründe gibt und dies nur zum Erreichen des richtigen Wertes von Λ dient. Noch wichtiger sind allerdings die Folgen eines Quintessenzfeldes. So verletzt seine Anwesenheit das Äquivalenzprinzip (träge Masse = schwere Masse). Die Abweichungen befinden sich im Bereich von 10^{-14}, waren aber bisher noch nicht messbar. Da aber auch unsere fundamentalen Konstanten, wie Protonenmasse oder elektrische Ladung, vom Kosmon-Feld anhängen, werden diese zeitabhängig, wodurch sich auch die Strukturbildung verändern kann. Eine Abschätzung des Effekts ist aber aufgrund der fehlenden Kosmon Kopplungskonstante nicht möglich. Um diese Effekte beobachten zu können untersucht man die Absorptionslinien weit entfernter Quasare. Mögliche Veränderungen wurden zwar von einer Gruppe entdeckt, diese werden aber nicht allgemein anerkannt.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Die Diskussion des Problems der kosmologischen Konstante ist alles andere als einfach. Es gibt viele verschiedene Lösungsansätze, jedoch erklärt keiner den richtigen Wert ohne entsprechendes *fine-tuning* vorzunehmen. Die Zahl der Arbeiten auf diesem Gebiet ist groß, die Ansätze teilweise sehr verschieden und dennoch scheint, zumindest gegenwärtig, keine Lösung in Sicht. Supersymmetrie, Stringtheorie, Anthropisches Prinzip und zeitabhängige skalare Felder sehen in diesem Zusammenhang zwar sehr elegant aus, die experimentelle Verifikation dieser steht allerdings noch aus. Eine weitere Diskussion des Problems erfordert wohl erst einmal ein besseres Verständnis der grundlegenden Physik. Erst dann wird sich zeigen ob $\Lambda = 0$ oder $\Lambda \neq 0$ ist und ob die dunkle Energie nur aus einem kosmologischen Term besteht oder noch andere Beiträge existieren.

Literaturverzeichnis

(1) W. Gebhardt: Vorlesung Kosmologie, WS06/07, Kap. 5 und Kap. 14
(2) Sean M. Carroll: The Cosmological Constant
(3) P. J. E. Peebles, Bharat Ratra: The Cosmological Constant and Dark Energy
(4) S. Weinberg: The Cosmological Constant Problems, 2000
(5) C. Wetterich: Quintessenz - die fünfte Kraft, Physik Journal 3 (2004) Nr. 12
(6) J. Louis: Die vielen Saiten der Stringtheorie, Physik Journal 7 (2008) Nr. 6
(7) T. Fließbach, Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie, 2006
(8) D. Giulini, N Straumann: Das Rätsel der kosmischen Vakuumenergiedichte und die beschleunigte Expansion des Universums, 2008
(9) NATURE, Vol 455, 16 October 2008